

Part B	Problems 1–12 which only require answers.
Part C	Problems 13–21 which require complete solutions.
Test time	150 minutes for part B and part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

The test consists of three written parts (part B, part C and part D). Together they give a total of 59 points consisting of 20 E-, 21 C- and 18 A-points.

Level requirements for test grades

E: 14 points

D: 23 points of which 7 points on at least C-level

C: 30 points of which 12 points on at least C-level

B: 39 points of which 6 points on A-level

A: 46 points of which 10 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled “*Only answer is required*” you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: _____

Date of birth: _____

Educational programme: _____

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required.* Write your answers in the test booklet.

1. Write $\frac{\pi}{18}$ radians in degrees. _____ (1/0/0)

2. Differentiate $f(x) = 3 \cos 5x$. $f'(x) =$ _____ (1/0/0)

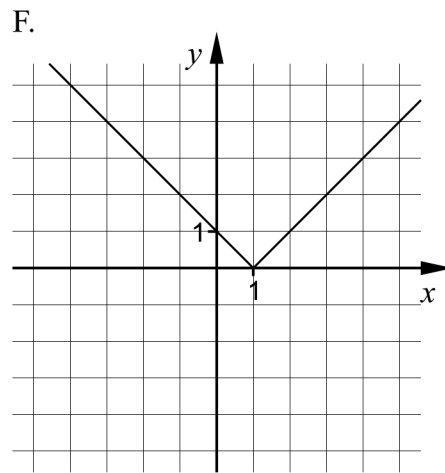
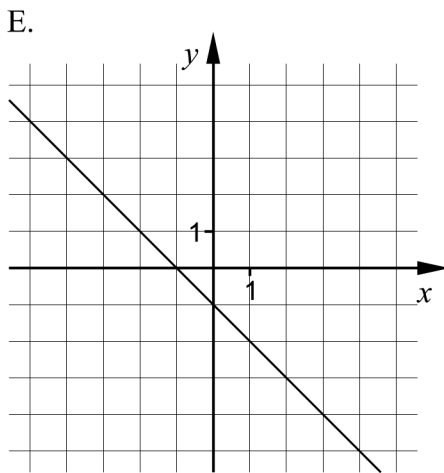
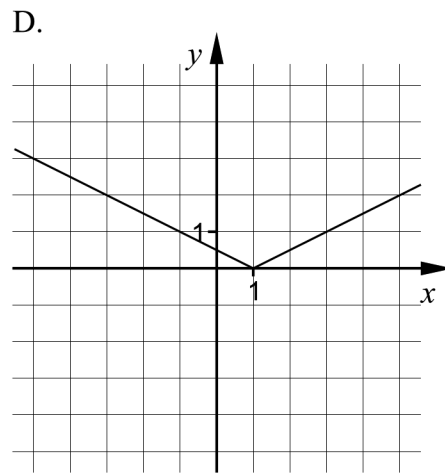
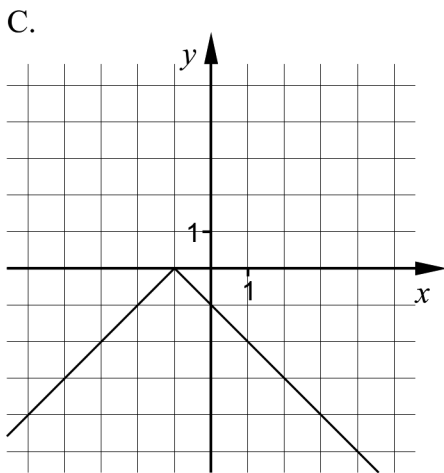
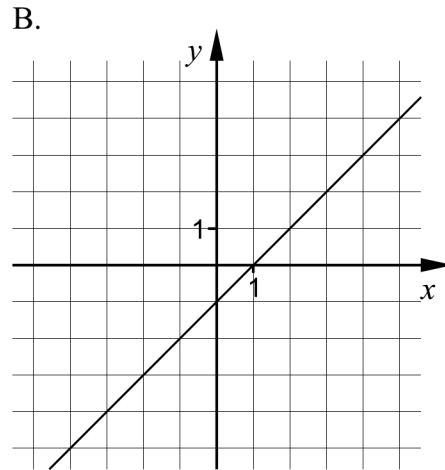
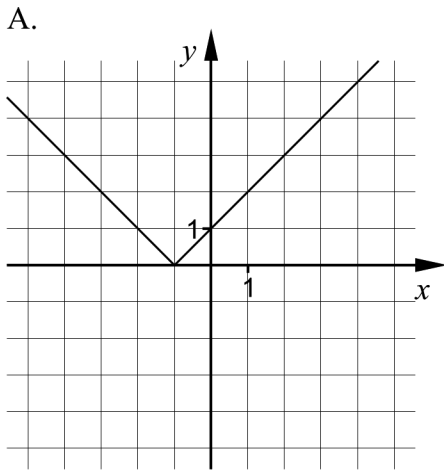
3. Determine $\cos 300^\circ$. _____ (1/0/0)

4. The complex number $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ is given.
 - a) Determine $\arg z$. _____ (1/0/0)
 - b) Write z^5 in polar form. _____ (1/0/0)

5. Determine the constant A so that the least value attained by the function $f(x) = A + 5 \sin 2x$ is 3 _____ (1/0/0)

6. Determine the real constant b so that the complex number $z = 1 + bi$ satisfies the following two conditions:
 - $|z| = \sqrt{10}$
 - z lies in the 4th quadrant. _____ (0/1/0)

7. The figures A–F show the graphs of six different functions.

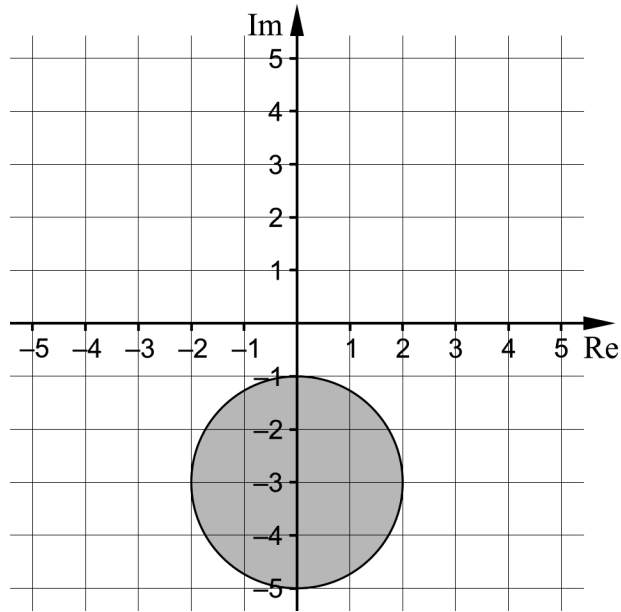


One of the figures A–F shows the graph of $y = |x - 1|$.

Which one?

_____ (1/0/0)

8. In the complex plane, a circular area is shaded.



Describe the shaded area using an inequality. _____ (0/1/0)

9. There are many trigonometric equations with the solution

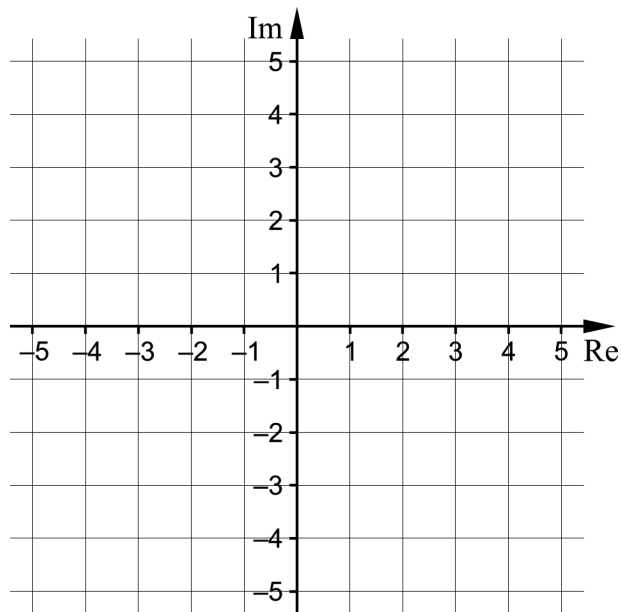
$$x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi \quad \text{and} \quad x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$$

Give one example of such an equation. _____ (0/0/1)

10. Calculate $\int_0^{\pi} x \cdot \sin^2 x \, dx + \int_0^{\pi} x \cdot \cos^2 x \, dx$. _____ (0/0/1)

11. Write down all asymptotes of $f(x) = \tan(2x - \frac{\pi}{4})$. _____ (0/0/1)

12. In the complex plane, mark the complex numbers z for which it holds that $|z - 2| = |z + 4i|$.



(0/0/2)

Part C: Digital resources are not allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

13. Solve the equation $\cos 3x = 0$ (2/0/0)

14. Calculate $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$. (2/0/0)

15. Ingela investigates the function $f(x) = A \cdot \sin(x) + A$ where A is a positive constant.

Help Ingela by writing down an expression for the maximum value of the function. Justify your expression. (2/0/0)

16. The equation $x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0$ is given.

a) Show that $x = 2$ is a root of the equation. (1/0/0)

b) Determine the other roots of the equation. (0/3/0)

17. Simplify $\sqrt{2} \sin(x + 45^\circ) - \sqrt{2} \sin(x - 45^\circ) - 2 \cos x$ as far as possible. (0/2/0)

18. Determine $f'(2)$ for $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}$. (0/2/0)

19. Two complex numbers $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ and $z_2 = -8i$ are given. Investigate if there exists a positive integer n such that $z_1^n = z_2$. (0/2/0)

- 20.** The function $f(x) = 2x^4 - 27x^2 + 54x$ has a local minimum for $x = -3$

Investigate whether f has any local maximum. (0/0/3)

- 21.** A rectangle is drawn in a coordinate system, with one vertex in the origin, one vertex on the positive x -axis, one vertex on the positive y -axis and one vertex on the graph of the function $f(x) = -2 \ln x$.

Determine the greatest possible area that such a rectangle can have. (0/0/3)

Part D	Problems 22–30 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

The test consists of three written parts (part B, part C and part D). Together they give a total of 59 points consisting of 20 E-, 21 C- and 18 A-points.

Level requirements for test grades

E: 14 points

D: 23 points of which 7 points on at least C-level

C: 30 points of which 12 points on at least C-level

B: 39 points of which 6 points on A-level

A: 46 points of which 10 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled “*Only answer is required*” you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: _____

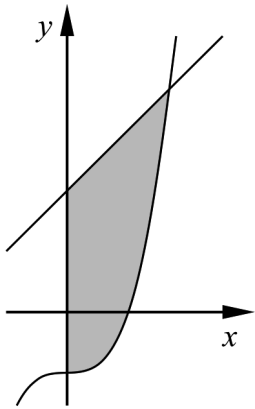
Date of birth: _____

Educational programme: _____

Part D: Digital resources are allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

22. The curve $y = x^2 + \cos x$ has a tangent in the point where the x -coordinate is 2.5. Determine the slope of the tangent. Give your answer to at least three significant figures. (2/0/0)

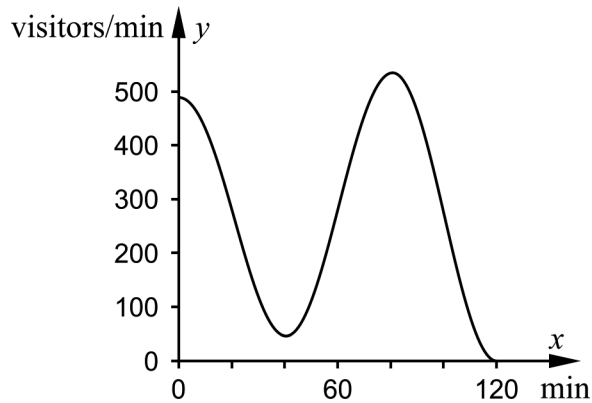
23. A region is bounded by the curve $y = x^3 - 1$, the line $y = 2 + x$ and the y -axis.



- Determine the area of the region. Give your answer to at least three significant figures. (2/0/0)

24. On a ticket for One Direction at Friends Arena, it says
"The show begins at 21:30. The arena opens at 19:30."

According to a simple model, the arena is filled at a rate of y visitors/minute, where $y = 280 + (210 + 0.583x) \cdot \cos \frac{\pi \cdot x}{40}$ and x is the time in minutes after the arena has opened. The model is assumed to be valid between 19:30 and 21:30.

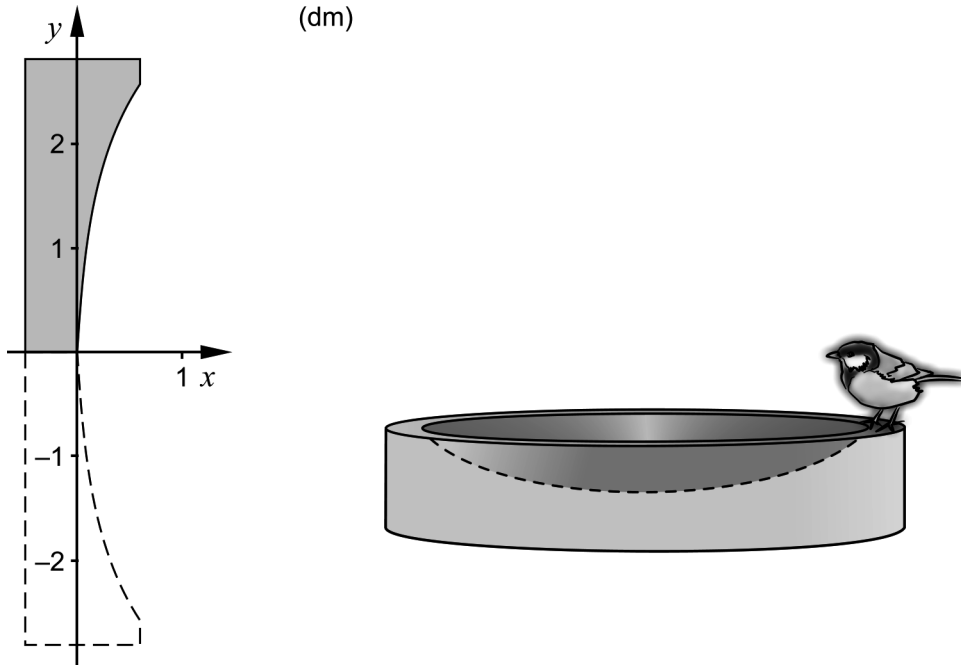


Calculate the number of visitors in the arena when the show begins. (2/0/0)

25. Some smoke detectors contain a small amount of the element Americium-241. The element is radioactive, which means that the atoms will decay. The time it takes for an atom of Americium-241 to decay is a random variable with density function $f(t) = \frac{1}{620} e^{-\frac{t}{620}}$, where t is measured in years.

- a) Determine the probability that a randomly selected atom of the element will decay during the first 20 years. (0/2/0)
- b) Determine at which point in time the probability that a randomly chosen atom of the element has decayed is 50 %. (0/2/0)

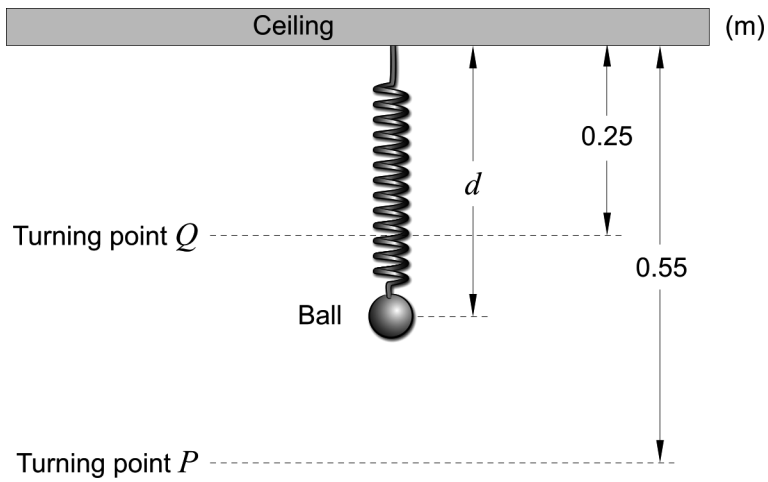
26. A birdbath is made of concrete. The birdbath is shaped like the solid of revolution formed by rotating the region bounded by the lines $x = -0.5$, $x = 0.6$, $y = 2.8$, $y = 0$ and the curve $y = \ln(20x + 1)$ around the x -axis. See figure.



Determine the volume of the concrete that the birdbath consists of.
Give your answer to at least three significant figures.

(0/2/0)

27. A ball hangs from a spring, attached to the ceiling. The ball is pulled down to position P and is released. It then moves vertically between the turning points P and Q . See figure.



According to a simple model, the distance of the ball from the ceiling can be described by the function $d = A \cos(kt) + B$, where d metres is the distance between the ball and the ceiling t seconds after the ball was released.

The time of 10 oscillations is measured to be 20 seconds. One oscillation is when the ball moves from P to Q and back to P .

- a) Determine the constants A , B and k . (0/2/0)
- b) Determine the speed of the ball when it is halfway between P and Q . (0/0/1)

28. The party organisers Skoj & Ploj fill balloons with an air compressor.



The balloons can be considered to be spherical and each balloon should be filled to a volume of 5.5 litres. The radius of the balloon increases at 3.5 cm/s at the time when the radius is 6.0 cm.

The air compressor fills the balloon with air smoothly so that the volume increases at a constant speed.

Determine how long it takes to inflate a balloon which is empty at the beginning.

(0/2/2)

29. For the functions f and g the following holds:

- $f(0) = 1$
- $f'(0) = 2$
- $g(0) = 2$
- $g'(0) = -1$

The function h is defined by $h(x) = f(x) \cdot (g(x))^3$.

Determine $h'(0)$.

(0/0/2)

30. A laser pointer is placed on a rotating disc. A red luminous point can be seen where the laser beam from the laser pointer hits the wall. The distance between the wall and the centre of the rotating disc is L metres. At time $t = 0$ the laser beam shines against the wall at a right angle, see figure 1.

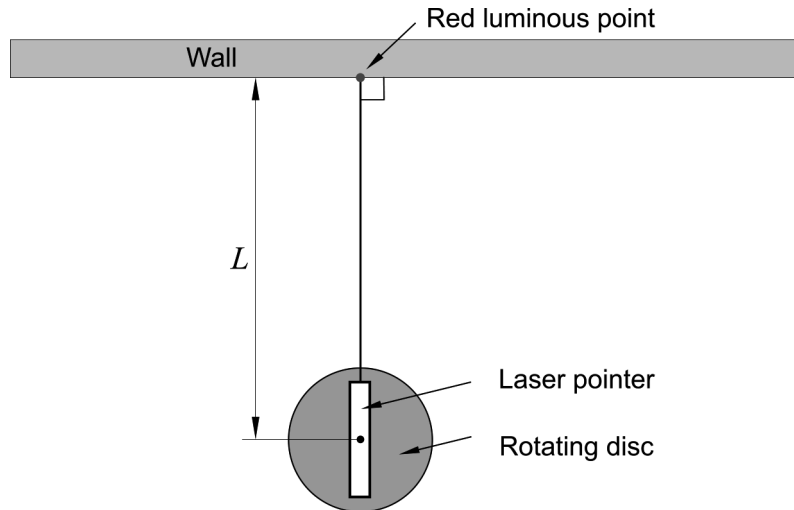


Figure 1

The disc with the laser pointer rotates so that the red luminous point moves to the right on the wall. At the time t seconds, the disc has rotated the angle α radians and the luminous point has moved a distance of x metres along the wall. See figure 2.

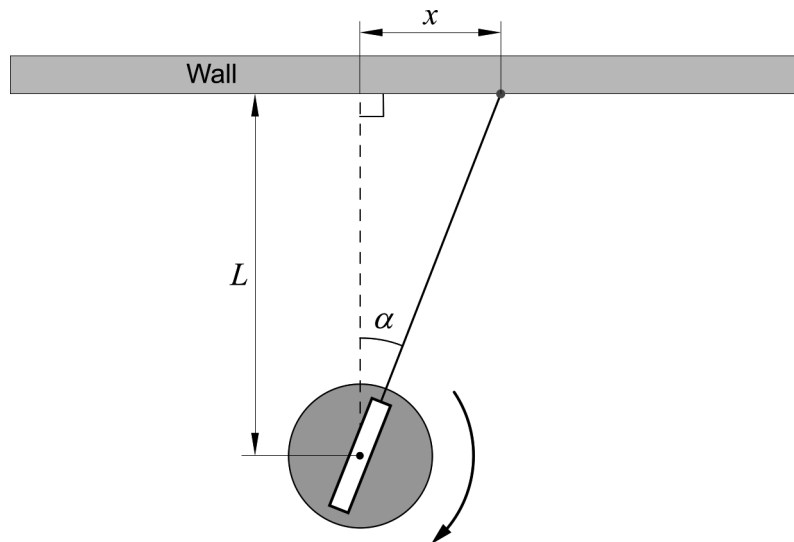


Figure 2

The disc is rotated at a constant angular velocity C radians/s so that $\alpha = C \cdot t$

The luminous point moves along the wall at the velocity $\frac{dx}{dt}$

Determine an expression for the velocity $\frac{dx}{dt}$

(0/0/2)

Innehållsförteckning

Inledning	4
Läsanvisning.....	4
1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4	5
Uppgifter av kortsvarstyp	5
Uppgifter av långsvarstyp	5
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga	6
Sammanställning av elevresultat	7
Sammanställning till ett provbetyg	7
2. Bedömningsanvisningar	8
Läsanvisning.....	8
Instruktioner för bedömning av delprov B.....	8
Instruktioner för bedömning av delprov C.....	10
Instruktioner för bedömning av delprov D	12
3. Exempel på bedömda elevlösningar	14
Uppgift 12	14
Uppgift 15	16
Uppgift 16	17
Uppgift 19	19
Uppgift 20	20
Uppgift 21	21
Uppgift 28	23
4. Instruktioner för sammanställning till ett provbetyg	25
Sammanställningen till ett provbetyg i samband med provet i matematik 4	25
Resultaten på provet i relation till kursbetyget	25
5. Instruktioner för inrapportering av provresultat	26
6. Kopieringsunderlag och webbmaterial	28
Webbmaterial.....	28
Formulär för sammanställning av elevresultat	29
Provsammanställning – centralt innehåll	30
Centralt innehåll matematik 4 – förkortningar	31

Inledning

På uppdrag av regeringen ansvarar Skolverket för samtliga nationella prov. Syftet med de nationella proven är i huvudsak att

- stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning
- ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapskraven uppfylls på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå.

De nationella proven kan också bidra till

- att konkretisera kurs- och ämnesplanerna
- en ökad måluppfyllelse för eleverna.

Det är rektorn som ansvarar för organisationen omkring provet på skolan och för att leda och fördela arbetet.

Läsanvisning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 4. Häftet består av 6 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma elevernas prestationer på de olika delproven (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanställningen till ett provbetyg (kapitel 4). De två avslutande kapitlen innehåller instruktioner för inrapportering av provresultat (kapitel 5) samt kopieringsunderlag och hänvisningar till webbmaterial (kapitel 6).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges de poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som provas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den huvudsakliga som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

Uppgifter av kortsvarstyp

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

Uppgifter av långsvarstyp

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfelet och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfelet.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. (Eventuella avvikelser från dessa modeller kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.)

Modell 1

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E_p
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 E_p

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen kan falla ut först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E _p
med korrekt bestämning av...	+1 E _p
Godtagbar verifiering av...	+1 E _p

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ...
1 E _R	1 E _R och 1 C _R	1 E _R , 1 C _R och 1 A _R

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

I samband med vissa uppgifter ska elevens skriftliga kommunikativa förmåga bedömas. Då gäller följande krav:

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \approx, \pm, \sqrt{\quad}, f(x), f'(x), f''(x), x, y, (\quad), [\quad], \int, dx$, gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v, \sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differentialekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

Sammanställning av elevresultat

När eleven har genomfört de olika delproven noteras resultaten i ”Formulär för sammanställning av elevresultat” som finns i kapitel 6. Syftet med formuläret är att underlätta för läraren att sammanställa och rapportera in elevens resultat. Det kan också användas vid samtal med eleven om provresultatet.

Sammanställning till ett provbetyg

När samtliga delprov är genomförda ska resultaten summeras till ett provbetyg. Information om hur summeringen går till finns i kapitel 4.

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

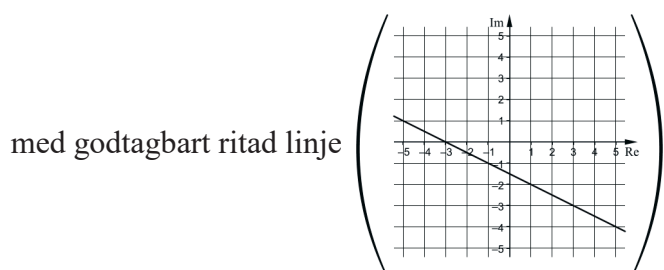
Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

- | | | |
|-----------|---|--------------------|
| 1. | | Max 1/0/0 |
| | Korrekt svar (10°) | +1 E _B |
| 2. | | Max 1/0/0 |
| | Korrekt svar ($f'(x) = -15 \sin 5x$) | +1 E _P |
| 3. | | Max 1/0/0 |
| | Korrekt svar (0,5) | +1 E _B |
| 4. | | Max 2/0/0 |
| a) | Korrekt svar $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ | +1 E _B |
| b) | Korrekt svar $\left(32\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ | +1 E _B |
| | <i>Kommentar:</i> Även svaret $2^5(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$ godtas. | |
| 5. | | Max 1/0/0 |
| | Korrekt svar (8) | +1 E _{PL} |
| 6. | | Max 0/1/0 |
| | Korrekt svar (-3) | +1 C _{PL} |

7. **Max 1/0/0**
 Korrekt svar (F) +1 E_B
8. **Max 0/1/0**
 Korrekt svar ($|z + 3i| \leq 2$) +1 C_B
Kommentar: Även svaret $|z + 3i| < 2$ godtas.
9. **Max 0/0/1**
 Korrekt svar (t ex $\sin 2x = 0,5$) +1 A_{PL}
10. **Max 0/0/1**
 Korrekt svar $\left(\frac{\pi^2}{2}\right)$ +1 A_{PL}
11. **Max 0/0/1**
 Korrekt svar $\left(x = \frac{3\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ +1 A_B
12. **Max 0/0/2**
 Markerar minst ett komplext tal z som uppfyller villkoret *eller* markerar en linje som går genom $1 - 2i$ +1 A_B








+1 A_{PL}

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”




Instruktioner för bedömning av delprov C

13. Max 2/0/0
- Godtagbar ansats, bestämmer minst en korrekt rot +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = \pm 30^\circ + n \cdot 120^\circ$) +1 E_P
14. Max 2/0/0
- Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion, $\frac{\sin 2x}{2}$ +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0,5) +1 E_P
15. Max 2/0/0
- Godtagbar ansats, anger uttrycket $2A$ +1 E_B
 med godtagbart enkelt resonemang som förklarar varför största värdet är $2A$ +1 E_R
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
16. Max 1/3/0
- a) Godtagbart enkelt resonemang som visar att $x = 2$ är en rot till ekvationen +1 E_R
- b) Godtagbar ansats, t ex faktorerar $x^3 + 2x^2 + x - 18$ och kommer fram till att övriga rötter fås ur ekvationen $x^2 + 4x + 9 = 0$ +1 C_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = -2 \pm i\sqrt{5}$) +1 C_P
 Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 "Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga" +1 C_K
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
17. Max 0/2/0
- Godtagbar ansats, utvecklar de två första termerna korrekt,
 $\sqrt{2}(\sin x \cos 45^\circ + \cos x \sin 45^\circ)$ respektive $\sqrt{2}(\sin x \cos 45^\circ - \cos x \sin 45^\circ)$ +1 C_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0) +1 C_P

- 18.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, deriverar korrekt, t ex $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2x(x^2 - 3)^{-\frac{3}{2}}$ +1 C_P
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (-2) +1 C_P
-
- 19.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, t ex jämför belopp *eller* argument för de två komplexa talen +1 C_R
- med i övrigt välgrundat resonemang som visar att inget sådant heltal n existerar +1 C_R
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
-
- 20.** **Max 0/0/3**
- Godtagbar ansats, t ex kommer fram till slutsatsen att $f'(x)$ innehåller faktorn $x + 3$ +1 A_R
- med godtagbar fortsättning, bestämmer derivatans andra nollställe, $x = \frac{3}{2}$ +1 A_R
- med i övrigt välgrundat och nyanserat resonemang som visar att lokalt maximum saknas +1 A_R
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
-
- 21.** **Max 0/0/3**
- Godtagbar ansats, ställer upp ett uttryck för arean och bestämmer derivatans nollställe, $x = \frac{1}{e}$ +1 A_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning, inklusive verifiering av maximum, med korrekt svar $\left(\frac{2}{e}\right)$ +1 A_{PL}
- Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 "Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga" +1 A_K
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 

Instruktioner för bedömning av delprov D

22. **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex anger att $y'(2,5)$ ska bestämmas +1 E_B
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4,40) +1 E_P
23. **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer skärningspunktens x -koordinat, $x = 1,672$ +1 E_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4,46 a.e.) +1 E_{PL}
- Kommentar:* Även svar utan enhet anses godtagbart.
24. **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex anger att antalet besökare bestäms av integralen
- $$\int_0^{120} (280 + (210 + 0,583x) \cos \frac{\pi x}{40}) dx$$
- +1 E_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (33 400) +1 E_M
25. **Max 0/4/0**
- a) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt integral, $\int_0^{20} \frac{1}{620} e^{-\frac{t}{620}} dt$ +1 C_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3 %) +1 C_M
- b) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt ekvation, t ex
- $$\int_0^x \frac{1}{620} e^{-\frac{t}{620}} dt = 0,5$$
- +1 C_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (430 år) +1 C_{PL}
26. **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer en relevant rotationsvolym med integral
eller
anger att sökt volym kan erhållas som differensen mellan cylinderns volym
och urgröpningens volym samt bestämmer cylinderns volym +1 C_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (20,4 dm³) +1 C_M

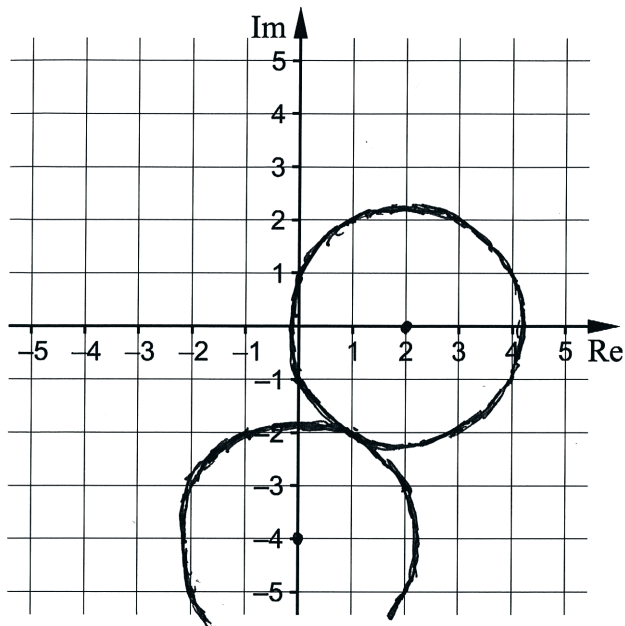
- 27.** **Max 0/2/1**
- a) Godtagbar ansats, bestämmer minst en av konstanterna korrekt +1 C_B
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar +1 C_B
 ($A = 0,15$, $B = 0,40$ och $k = \pi$)
- b) Godtagbar lösning med godtagbart svar (0,47 m/s) +1 A_M
Kommentar: Även svaret $-0,47$ m/s anses godtagbart.
- 28.** **Max 0/2/2**
- Godtagbar ansats, ställer upp kedjeregeln och
 sätter in $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ eller sätter in $\frac{dr}{dt} = 3,5$, t ex $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot 3,5$ +1 C_M
 med godtagbar fortsättning, beräknar $\frac{dV}{dt}$, 1583 cm³/s +1 C_M
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,5 s) +1 A_M
 Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 A_K
- Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”* 
- 29.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, bestämmer $h'(x)$ korrekt,
 $h'(x) = f'(x) \cdot (g(x))^3 + f(x) \cdot 3(g(x))^2 \cdot g'(x)$ +1 A_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (4) +1 A_P
- 30.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, t ex tecknar uttrycket $x = L \tan Ct$ +1 A_M
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\frac{dx}{dt} = \frac{CL}{\cos^2 Ct}\right)$ +1 A_M
Kommentar: Även svaret $\frac{dx}{dt} = \frac{CL}{\cos^2 \alpha}$ godtas.

3. Exempel på bedömda elevlösningar

I det här kapitlet finns exempel på bedömda elevlösningar till vissa uppgifter i provet samt kommentarer till exemplen som stöd för bedömningen.

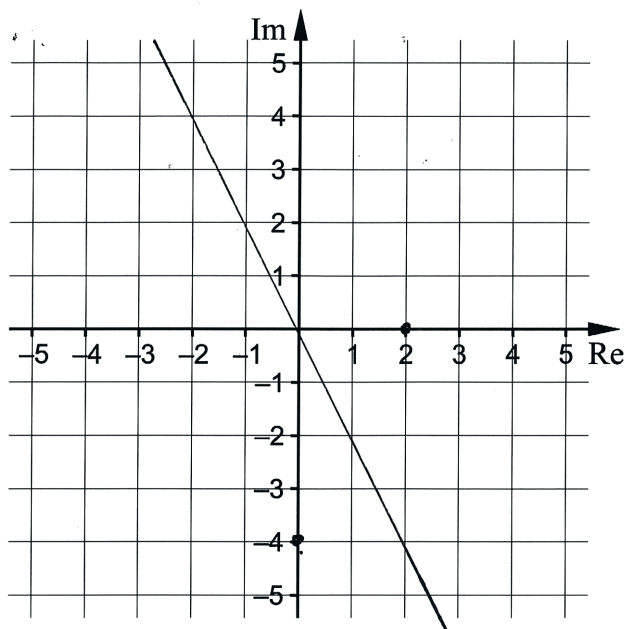
Uppgift 12

Elevlösningsexempel 12.1 (0 poäng)



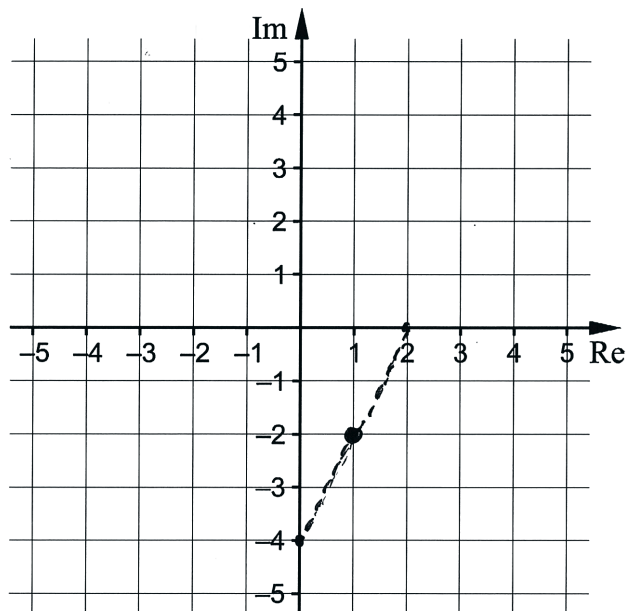
Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen visar två hjälpcirklar men det framgår inte för vilka komplexa tal likheten gäller vilket gör att lösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 12.2 (1 AB)



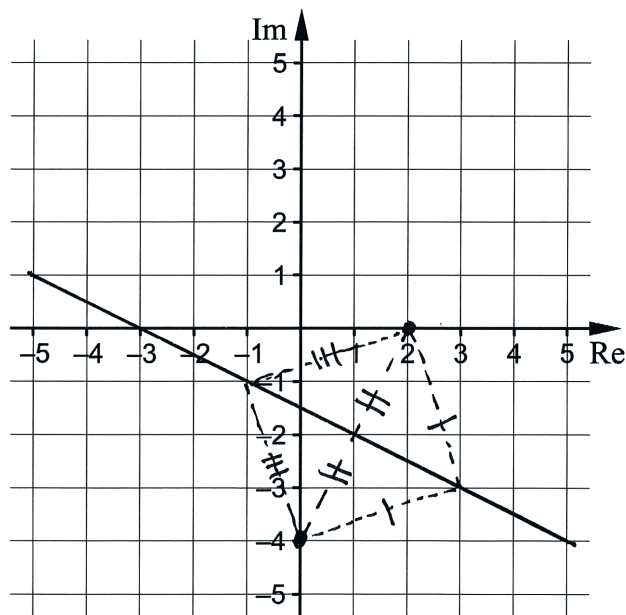
Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen visar en linje med fel lutning men som går genom $1 - 2i$ vilket gör att kraven för begreppspoängen på A-nivå anses vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 12.3 (1 AB)



Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen visar en hjälpsträcka som går genom $1 - 2i$ vilket gör att kraven för begreppspoängen på A-nivå anses vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 12.4 (1 AB och 1 APL)



Bedömningskommentar till exemplet: Grafen innehåller den korrekta linjen. De övriga markeringarna anses vara hjälpkonstruktioner som inte ingår i svaret. Därmed uppfylls kraven för de båda poängen.

Uppgift 15

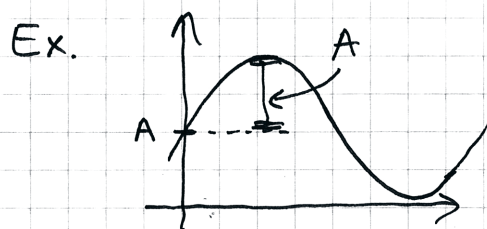
Elevlösningsexempel 15.1 (1 EB)

Det största värdet $= A + A = 2A$
 vilket betyder att det största värdet är
 dubbelt så stort som det positiva värdet på A .

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen konstateras att största värdet är $A + A = 2A$ vilket motsvarar kraven för begreppsöingen på E-nivå. Dock saknas förklaring till varför detta uttryck gäller. Därmed anses inte kraven för resonemangspoängen på E-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 15.2 (1 EB och 1 ER)

Det största värdet är vid punkten "A"
 med en höjning av A . Största värdet blir $2A$.



Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen ges en förklaring till varför största värdet är $2A$. Den förklarande texten är något svårtolkad men detta vägs upp av en förtydligande figur. Sammantaget ges lösningen en begreppsöing och en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 15.3 (1 EB och 1 ER)

Då det är största värdet kommer $\sin(x) = 1$
 Vilket gör formeln till:
 $A \cdot 1 + A \Rightarrow A + A = 2A$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen ges det godtagbara argumentet "Då det är största värdet kommer $\sin(x) = 1$ " varpå funktionsvärdet då $\sin(x) = 1$ bestäms till $2A$. Sammantaget ges lösningen en begreppsöing och en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 16

Elevlösningsexempel 16.1 (1 ER och 2 CP)

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0$$

$$x = 2 \text{ är en rot om } f(2) = 0$$

$$f(2) = \underbrace{8+8}_{16} + \underbrace{2-18}_{-16} = 0$$

b)

$$\begin{array}{r} x-2 \overline{) \begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + x - 18 \\ -x^3 - 2x^2 \\ \hline 4x^2 + x \\ -4x^2 - 8x \\ \hline 9x - 18 \\ -9x - 18 \\ \hline 0 \end{array}} \\ \hline \end{array}$$

Faktorisera $x^2 + 4x + 9$
via p-q formel

$$x^2 + 4x + 9 = 0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{4-9}$$

$$= -2 \pm \sqrt{-5}$$

$$= -2 \pm i\sqrt{5}$$

$$\text{Svar: } x_1 = 2$$

$$x_2 = -2 + i\sqrt{5}$$

$$x_3 = -2 - i\sqrt{5}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas att $x = 2$ är en rot och de två övriga rötterna bestäms. När det gäller kommunikation saknas förklaring till varför polynomdivision med $x - 2$ utförs, på första raden sätts $f(x) = 0$ efter funktionsuttrycket och parenteser saknas i polynomdivisionen. Detta gör att kraven för kommunikationspoängen på C-nivå inte anses uppfyllda. Sammantaget ges en resonemangspoäng på E-nivå i deluppgift a) och två procedurpoäng på C-nivå i deluppgift b).

Elevlösningsexempel 16.2 (1 ER, 2 CP och 1 CK)

$$x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0$$

$$a) \quad 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 - 18 = 8 + 8 + 2 - 18 = 0$$

$$2 \text{ är en rot till } x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0$$

b) Om 2 är en rot är $x-2$ en faktor

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 4x + 9 \\
 \hline
 x^3 + 2x^2 + x - 18 \quad \boxed{x-2} \\
 - (x^3 - 2x^2) \\
 \hline
 4x^2 + x - 18 \\
 - (4x^2 - 8x) \\
 \hline
 9x - 18 \\
 - (9x - 18) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x + 9 &= 0 \\
 x &= -2 \pm \sqrt{4-9} \\
 x &= -2 \pm \sqrt{-5} \\
 x &= -2 \pm i\sqrt{5} \\
 x_1 &= -2 + i\sqrt{5} \\
 x_2 &= -2 - i\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas att $x = 2$ är en rot och de två övriga rötterna bestäms. När det gäller kommunikation nämns inte faktorsatsen men "Om 2 är en rot är $x-2$ en faktor" anses vara tillräckligt för att förklara varför polynomdivision med $x-2$ utförs. Sammantaget anses kraven för kommunikationspoäng vara uppfyllda.

Uppgift 19

Elevlösningsexempel 19.1 (2 CR)

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad z_2 = -8i$$

$$(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \quad -8i = 8(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$$

$$(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = 4(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

$$(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3 = 8(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

lika

olika

Svar: Nej, finns inte

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen skrivs båda talen på polär form och genom prövning bestäms n så att beloppet av z_1^n blir lika med beloppet av z_2 . Därefter jämförs belopp och argument och en korrekt slutsats dras. Trots att lösningen är något knapphändig anses den nätt och jämnt uppfylla kraven för de två resonemangspoängen på C-nivå.

Uppgift 20

Elevlösningsexempel 20.1 (2 AR)

$$f(x) = 2x^4 - 27x^2 + 54x$$

$$f'(x) = 8x^3 - 54x + 54$$

$$8x^3 - 54x + 54 = 0$$

$$x = -3 \Rightarrow (x+3)$$

$$\begin{array}{r} 8x^2 - 24x + 18 \\ \hline 8x^3 - 54x + 54 \quad \boxed{x+3} \\ - (8x^3 + 24x^2) \\ \hline -24x^2 - 54x \\ - (-24x^2 - 72x) \\ \hline 18x + 54 \\ - (18x + 54) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$Pq: 8x^2 - 24x + 18 = 0$$

$$x^2 - 3x + \frac{18}{8} = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{18}{8}}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{18}{8}}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{18}{8} - \frac{18}{8}}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = 24x^2 - 54$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 24\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 54$$

$$= 24\left(\frac{9}{4}\right) - 54$$

$$= \frac{216}{4} - 54$$

$$= \frac{216}{4} - \frac{216}{4} = 0$$

Svar: funktionen har en terrasspunkt

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen dras, om än knapphändigt redovisat, slutsatsen att $f'(x)$ innehåller faktorn $x+3$. Därefter bestäms faktorn $8x^2 - 24x + 18$ och dess enda nollställe $x = \frac{3}{2}$. För att avgöra karaktären bestäms andraderivatans $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ men detta är inte tillräckligt för att avgöra att det är en terrasspunkt. Lösningen anses därmed inte uppfylla kraven för den tredje resonemangspoängen på A-nivå. Sammantaget ges lösningen två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 21

Elevlösningsexempel 21.1 (2 APL)

$$y = x \cdot -2 \ln x$$

$$y' = -2 \ln x - 2 \quad y' = 0$$

$$\ln x = -1$$

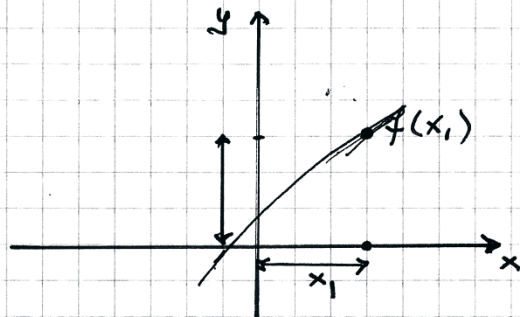
$$x = e^{-1}$$

$$y'' = -\frac{2}{x} < 0 \Rightarrow \text{max}$$

$$y = -2e^{-1} \ln e^{-1} = 2e^{-1}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av största arean. När det gäller kommunikation är lösningen knapphändig. Bland annat saknas förklarande text helt vilket gör att lösningen inte är lätt att följa. Lösningen anses därmed inte uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 21.2 (2 APL och 1 AK)



$$A = b \cdot x_1 = f(x_1) \cdot x_1 \Rightarrow A = -2 \ln x_1 \cdot x_1$$

$$A' = -\frac{2}{x_1} \cdot x_1 + (-2 \ln x_1 \cdot 1) = -\frac{2x_1}{x_1} - 2 \ln x_1 = -2 - 2 \ln x_1$$

$$-2 - 2 \ln x_1 = 0$$

$$2(-1 - \ln x_1) = 0$$

$$-1 - \ln x_1 = 0$$

$$-1 = \ln x_1$$

$$x_1 = e^{-1}$$

$$A'' = -\frac{2}{x_1^2} \Rightarrow A''(e^{-1}) = -\frac{2}{e^{-2}} = -2e$$

$$A'' < 0 \Rightarrow \text{max. punkt}$$

$$A = -2 \ln x_1 \cdot x_1 = -2 \ln\left(\frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{e}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms areans maximala värde korrekt. När det gäller kommunikation är funktionens graf felaktig men figuren visar ändå principiellt hur uttrycket för arean fås. I övrigt är lösningen lätt att följa och förstå. Kraven för kommunikationspoäng på A-nivå anses vara uppfyllda.

Uppgift 28

Elevlösningsexempel 28.1 (2 C_M och 1 A_M)

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \quad r' = 3,5 \text{ cm/s} = 0,35 \text{ dm/s}$$

$$V' = \frac{4\pi 3r^2}{3} = 4\pi r^2$$

$$V' = 4\pi r^2 \cdot r' \\ = 4\pi \cdot 0,6^2 \cdot 0,35 = 1,583 \text{ dm}^3/\text{s}$$

Konstant hastighet $\rightarrow V' = \frac{V}{t} \rightarrow t = \frac{V}{V'}$

$$t = \frac{V}{V'} = \frac{5,5 \text{ dm}^3}{1,583 \text{ dm}^3/\text{s}} = \underline{\underline{3,47 \text{ s}}}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en korrekt bestämning av den efterfrågade tiden. När det gäller kommunikation används beteckningen V' för såväl $\frac{dV}{dr}$ som

$\frac{dV}{dt}$ vilket medför att lösningen inte är helt lätt att följa och förstå. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på C-nivå och en modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 28.2 (2 CM, 1 AM och 1 AK)

$$V = 5,5 \text{ liter} \quad \frac{dr}{dt} = 3,5 \text{ cm/s} = 0,35 \text{ dm/s}$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \quad \text{då } r = 0,6 \text{ dm}$$

$$\text{liter} = \text{dm}^3$$

$$\frac{dV}{dr} = V' = \frac{3 \cdot 4\pi r^2}{3} = 4\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi \cdot 0,6^2 \cdot 0,35 = 1,58 \text{ liter/s}$$

$$\text{Konstant hastighet: } V = \frac{dV}{dt} \cdot t$$

$$t = \frac{5,5}{1,58} = \underline{\underline{3,47 \text{ s}}}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt. När det gäller kommunikation används symboler och beteckningar korrekt. Det saknas förklarande text vilket gör lösningen något otydlig men trots denna brist anses kraven för kommunikationspoäng på A-nivå nått och jämnt vara uppfyllda. Elevlösningen ges samtliga möjliga poäng.