Delprov B	Uppgift 1–12. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 13–21. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för delprov B och delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 59 poäng varav 20 E-, 21 C- och 18 A-poäng.

Gräns för provbetyget
E: 14 poäng
D: 23 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 30 poäng varav 12 poäng på minst C-nivå
B: 39 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 46 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ____

Födelsedatum: ____

Gymnasieprogram/Komvux: ________________________________

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i elevhäftet.

1. Omvandla $\frac{\pi}{18}$ radianer till grader. ____________________ (1/0/0)

2. Derivera $f(x) = 3\cos 5x$. $f'(x) =$ ____________________ (1/0/0)

3. Bestäm $\cos 300°$. ____________________ (1/0/0)

4. Det komplexa talet $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ är givet.

a) Bestäm $\arg z$. ____________________ (1/0/0)

b) Skriv z^5 på polär form. ____________________ (1/0/0)

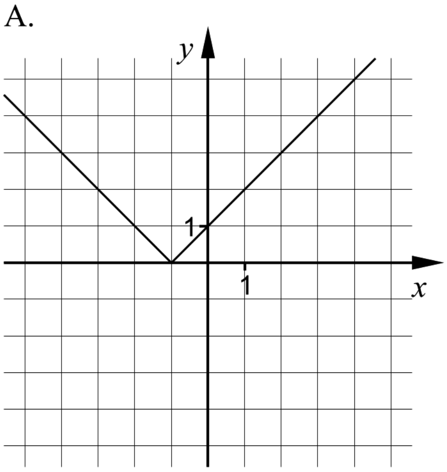
5. Bestäm konstanten A så att det minsta värde funktionen $f(x) = A + 5\sin 2x$ antar är 3 ____________________ (1/0/0)

6. Bestäm den reella konstanten b så att det komplexa talet $z = 1 + b\mathrm{i}$ uppfyller följande två villkor:

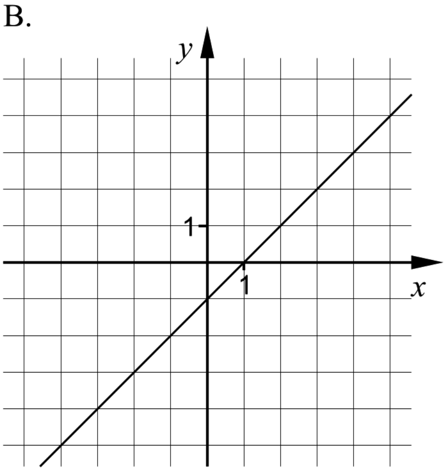
- $|z| = \sqrt{10}$
- z ligger i 4:e kvadranten. ____________________ (0/1/0)

7. Figurerna A–F visar graferna till sex olika funktioner.

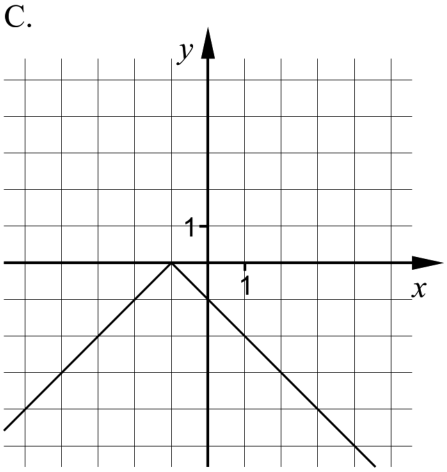
A.



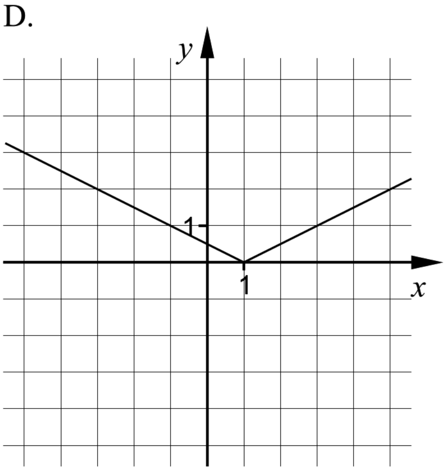
B.



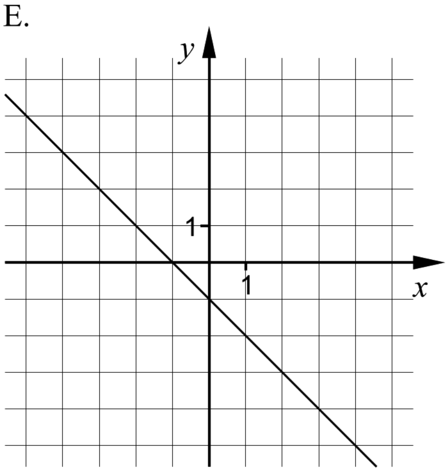
C.



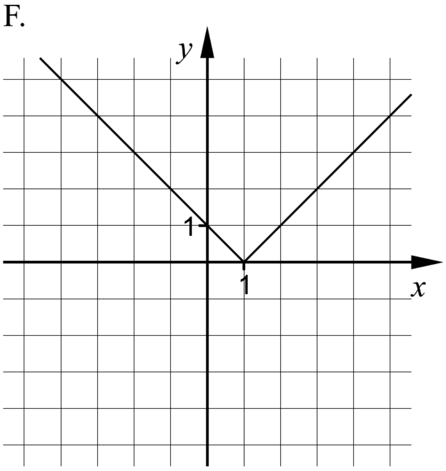
D.



E.



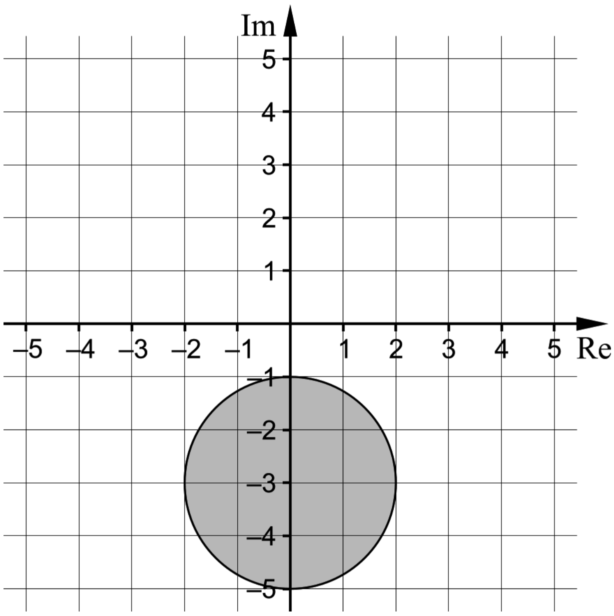
F.



En av figurerna A–F visar grafen till $y = |x - 1|$.

Vilken? ______________________ (1/0/0)

8. I det komplexa talplanet är ett cirkulärt område markerat.



Beskriv det markerade området med en olikhet. ____________________ (0/1/0)

9. Det finns många trigonometriska ekvationer som har lösningen

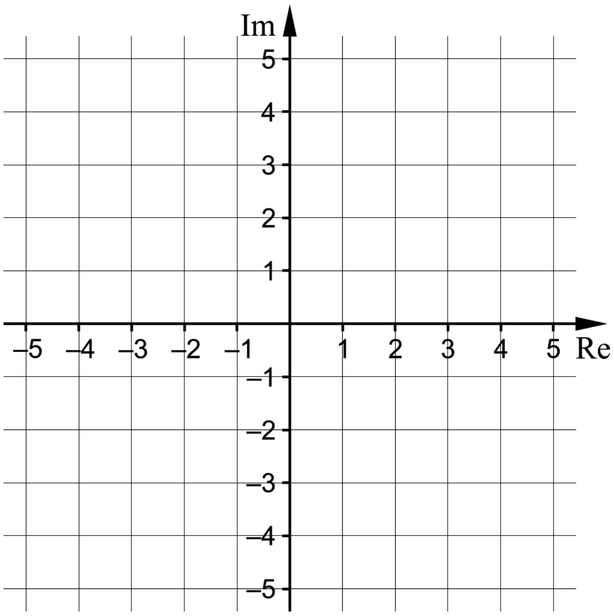
$x = \dfrac{\pi}{12} + n \cdot \pi$ och $x = \dfrac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$

Ge ett exempel på en sådan ekvation. ____________________ (0/0/1)

10. Beräkna $\int_0^{\pi} x \cdot \sin^2 x \, dx + \int_0^{\pi} x \cdot \cos^2 x \, dx$. ____________________ (0/0/1)

11. Ange alla asymptoter till $f(x) = \tan(2x - \dfrac{\pi}{4})$. ____________________ (0/0/1)

12. Markera i det komplexa talplanet de komplexa tal z för vilka det gäller att $|z-2| = |z+4\mathrm{i}|$.



(0/0/2)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

13. Lös ekvationen $\cos 3x = 0$ (2/0/0)

14. Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$. (2/0/0)

15. Ingela undersöker funktionen $f(x) = A \cdot \sin(x) + A$ där A är en positiv konstant.

Hjälp Ingela genom att teckna ett uttryck för funktionens största värde. Motivera ditt uttryck. (2/0/0)

16. Ekvationen $x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0$ är given.

a) Visa att $x = 2$ är en rot till ekvationen. (1/0/0)

b) Bestäm ekvationens övriga rötter. (0/3/0)

17. Förenkla $\sqrt{2}\sin(x + 45°) - \sqrt{2}\sin(x - 45°) - 2\cos x$ så långt som möjligt. (0/2/0)

18. Bestäm $f'(2)$ för $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}$. (0/2/0)

19. Två komplexa tal $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ och $z_2 = -8i$ är givna. Undersök om det finns något positivt heltal n sådant att $z_1^n = z_2$. (0/2/0)

20. Funktionen $f(x) = 2x^4 - 27x^2 + 54x$ har ett lokalt minimum för $x = -3$

Undersök om f har något lokalt maximum. (0/0/3)

21. I ett koordinatsystem ritas en rektangel med ett hörn i origo, ett hörn på positiva x-axeln, ett hörn på positiva y-axeln och ett hörn på grafen till funktionen $f(x) = -2\ln x$.

Bestäm den största möjliga area som en sådan rektangel kan ha. (0/0/3)

Delprov D	Uppgift 22–30. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 59 poäng varav 20 E-, 21 C- och 18 A-poäng.

Gräns för provbetyget
E: 14 poäng
D: 23 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 30 poäng varav 12 poäng på minst C-nivå
B: 39 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 46 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ____

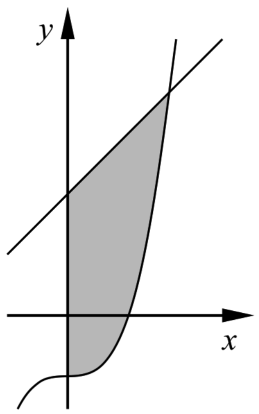
Födelsedatum: ____

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

22. Kurvan $y = x^2 + \cos x$ har en tangent i den punkt där x-koordinaten är 2,5
Bestäm tangentens lutning. Svara med minst tre värdesiffror. (2/0/0)

23. Ett område begränsas av kurvan $y = x^3 - 1$, linjen $y = 2 + x$ och y-axeln.



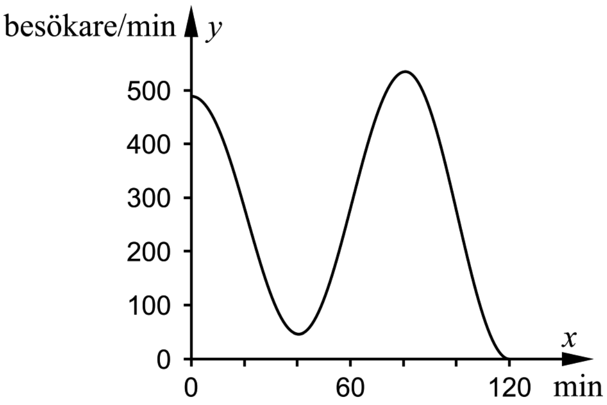
Bestäm områdets area. Svara med minst tre värdesiffror. (2/0/0)

24. På en biljett till en One Direction-konsert på Friends Arena står att konserten börjar klockan 21.30 och att arenan öppnas klockan 19.30.

Enligt en enkel modell fylls arenan med hastigheten y besökare/minut, där

$$y = 280 + (210 + 0{,}583x) \cdot \cos \frac{\pi \cdot x}{40}$$

och x är tiden i minuter efter att arenan öppnas.
Modellen antas gälla från klockan 19.30 till klockan 21.30.



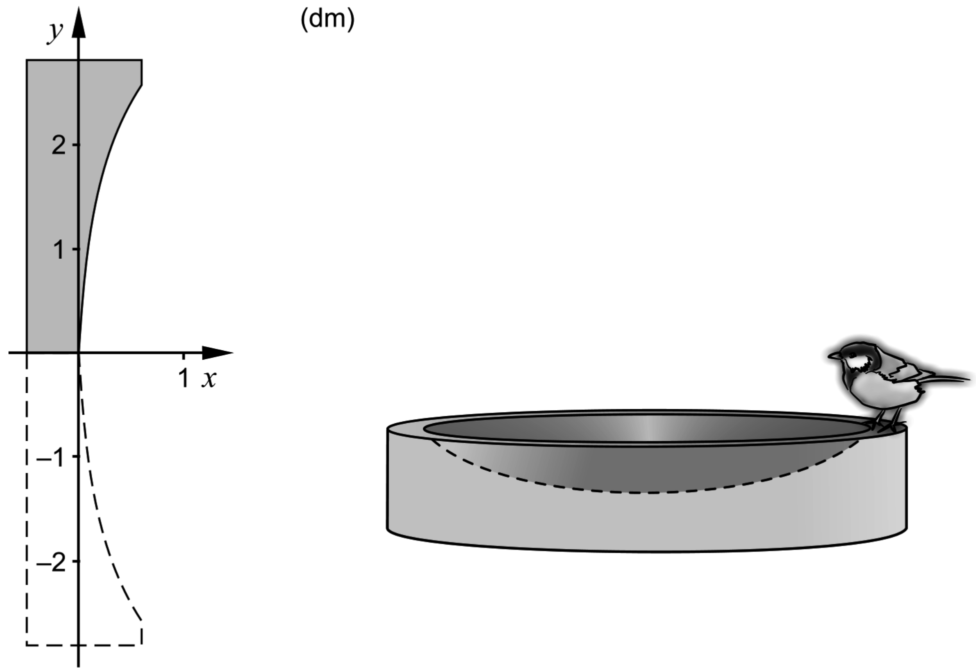
Beräkna antalet besökare i arenan då konserten börjar. (2/0/0)

25. Vissa brandvarnare innehåller en liten mängd av ämnet Americium-241. Ämnet är radioaktivt vilket innebär att atomerna sönderfaller. Tiden till dess att en atom Americium-241 sönderfaller är en slumpvariabel med täthetsfunktionen $f(t) = \frac{1}{620} e^{-\frac{t}{620}}$, där t mäts i år.

a) Bestäm sannolikheten för att en slumpvis vald atom av ämnet sönderfaller under de första 20 åren. (0/2/0)

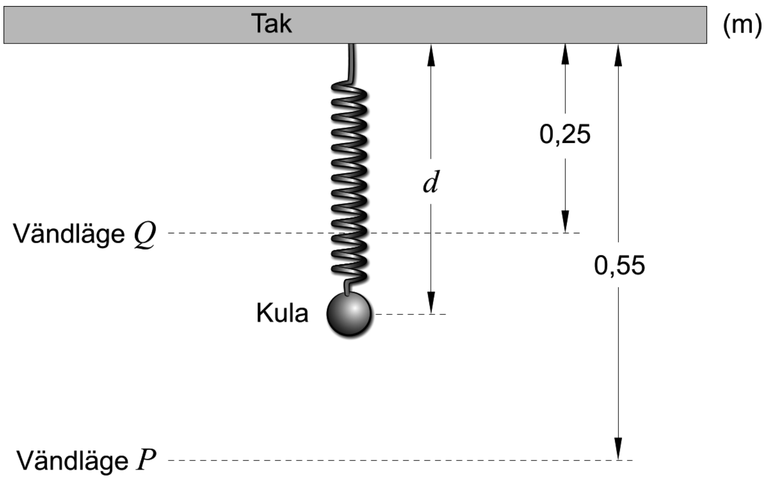
b) Bestäm vid vilken tidpunkt sannolikheten för att en slumpvis vald atom av ämnet sönderfallit är 50 %. (0/2/0)

26. Ett fågelbad tillverkas av betong. Fågelbadet har formen av den rotationskropp som bildas när området som begränsas av linjerna $x = -0{,}5$; $x = 0{,}6$; $y = 2{,}8$; $y = 0$ och kurvan $y = \ln(20x+1)$ får rotera kring *x*-axeln. Se figur.



Bestäm volymen av den betong som fågelbadet består av.
Svara med minst tre värdesiffror. (0/2/0)

27. En kula hänger i en fjäder som är fäst i ett tak. Kulan dras ned till läge P och släpps. Den rör sig då lodrätt mellan vändlägena P och Q. Se figur.



Enligt en enkel modell kan kulans avstånd från taket beskrivas med funktionen $d = A\cos(kt) + B$, där d meter är kulans avstånd från taket t sekunder efter att kulan släppts.

Tiden för 10 svängningar mäts till 20 sekunder. En svängning är då kulan rör sig från P till Q och tillbaka till P.

a) Bestäm konstanterna A, B och k. (0/2/0)

b) Bestäm kulans fart då den befinner sig mittemellan P och Q. (0/0/1)

28. Festfixarfirman Skoj & Ploj blåser upp ballonger med ett tryckluftsaggregat.

Ballongerna kan anses vara klotformade och varje ballong ska blåsas upp till volymen 5,5 liter. Ballongens radie ökar med 3,5 cm/s vid den tidpunkt då dess radie är 6,0 cm.

Aggregatet ger jämn luftpåfyllning så att volymen ökar med konstant hastighet.

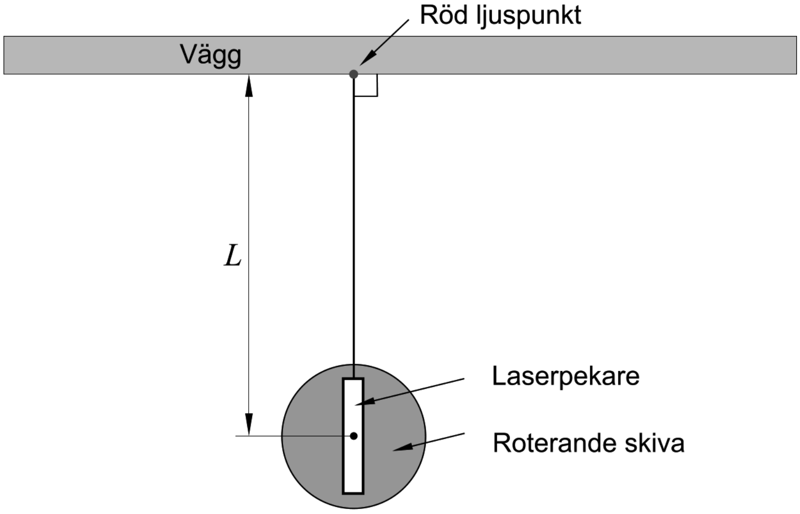
Bestäm hur lång tid det tar att blåsa upp en ballong som från början är tom. (0/2/2)

29. För funktionerna f och g gäller följande:

- $f(0)=1$
- $f'(0)=2$
- $g(0)=2$
- $g'(0)=-1$

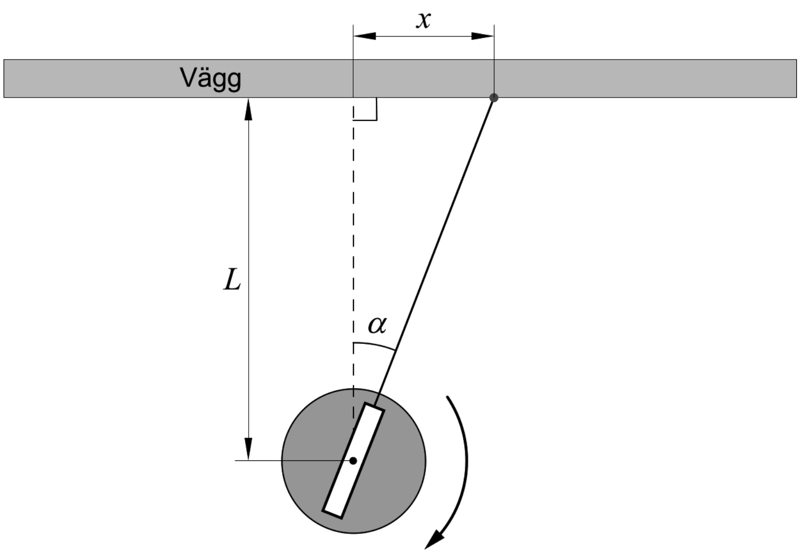
Funktionen h definieras av $h(x)=f(x)\cdot(g(x))^3$.
Bestäm $h'(0)$. (0/0/2)

30. En laserpekare är placerad på en roterande skiva. Där laserstrålen från laserpekaren träffar en vägg syns en röd ljuspunkt. Avståndet mellan väggen och den roterande skivans mittpunkt är L meter. Vid tiden $t = 0$ lyser laserstrålen vinkelrätt mot väggen, se figur 1.



Figur 1

Skivan med laserpekaren roterar så att den röda ljuspunkten rör sig åt höger längs väggen. Vid tiden t sekunder har skivan roterat vinkeln α radianer och ljuspunkten rört sig sträckan x meter längs väggen. Se figur 2.



Figur 2

Skivan roterar med konstant vinkelhastighet C radianer/s så att $\alpha = C \cdot t$.

Ljuspunkten rör sig längs väggen med hastigheten $\dfrac{dx}{dt}$

Bestäm ett uttryck för hastigheten $\dfrac{dx}{dt}$ (0/0/2)

Innehållsförteckning

Inledning

På uppdrag av regeringen ansvarar Skolverket för samtliga nationella prov. Syftet med de nationella proven är i huvudsak att

- stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning
- ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapskraven uppfylls på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå.

De nationella proven kan också bidra till

- att konkretisera kurs- och ämnesplanerna
- en ökad måluppfyllelse för eleverna.

Det är rektorn som ansvarar för organisationen omkring provet på skolan och för att leda och fördela arbetet.

Läsanvisning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 4. Häftet består av 6 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma elevernas prestationer på de olika delproven (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanställningen till ett provbetyg (kapitel 4). De två avslutande kapitlen innehåller instruktioner för inrapportering av provresultat (kapitel 5) samt kopieringsunderlag och hänvisningar till webbmaterial (kapitel 6).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges de poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den huvudsakliga som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

Uppgifter av kortsvarstyp

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

Uppgifter av långsvarstyp

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. (Eventuella avvikelser från dessa modeller kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.)

Modell 1

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen kan falla ut först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med korrekt bestämning av…	+1 E_P
Godtagbar verifiering av…	+1 E_P

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. …	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. …	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. …
1 E_R	1 E_R och 1 C_R	1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

I samband med vissa uppgifter ska elevens skriftliga kommunikativa förmåga bedömas. Då gäller följande krav:

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska
1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska
1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{}$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ \ )$, $[\ \ ]$, $\int$, $\mathrm{d}x$, gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v$, $\sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differentialekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

Sammanställning av elevresultat

När eleven har genomfört de olika delproven noteras resultaten i ”Formulär för sammanställning av elevresultat” som finns i kapitel 6. Syftet med formuläret är att underlätta för läraren att sammanställa och rapportera in elevens resultat. Det kan också användas vid samtal med eleven om provresultatet.

Sammanställning till ett provbetyg

När samtliga delprov är genomförda ska resultaten summeras till ett provbetyg. Information om hur summeringen går till finns i kapitel 4.

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (10°) +1 E_B

2. **Max 1/0/0**

Korrekt svar ($f'(x) = -15\sin 5x$) +1 E_P

3. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (0,5) +1 E_B

4. **Max 2/0/0**

a) Korrekt svar $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ +1 E_B

b) Korrekt svar $\left(32\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ +1 E_B

Kommentar: Även svaret $2^5\left(\cos 150° + i\sin 150°\right)$ godtas.

5. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (8) +1 E_{PL}

6. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (–3) +1 C_{PL}

7. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (F) $+1\ E_B$

8. **Max 0/1/0**

Korrekt svar ($|z+3i| \leq 2$) $+1\ C_B$

Kommentar: Även svaret $|z+3i| < 2$ godtas.

9. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (t ex $\sin 2x = 0,5$) $+1\ A_{PL}$

10. **Max 0/0/1**

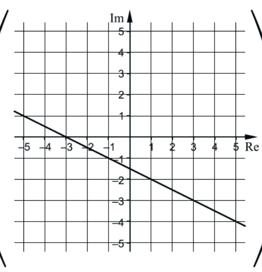
Korrekt svar $\left(\dfrac{\pi^2}{2} \right)$ $+1\ A_{PL}$

11. **Max 0/0/1**

Korrekt svar $\left(x = \dfrac{3\pi}{8} + n \cdot \dfrac{\pi}{2} \right)$ $+1\ A_B$

12. **Max 0/0/2**

Markerar minst ett komplext tal z som uppfyller villkoret *eller* markerar en linje som går genom $1-2i$ $+1\ A_B$

med godtagbart ritad linje (

) $+1\ A_{PL}$

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

Instruktioner för bedömning av delprov C

13. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer minst en korrekt rot +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = \pm 30° + n \cdot 120°$) +1 E_P

14. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion, $\frac{\sin 2x}{2}$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0,5) +1 E_P

15. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, anger uttrycket $2A$ +1 E_B

med godtagbart enkelt resonemang som förklarar varför största värdet är $2A$ +1 E_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

16. **Max 1/3/0**

a) Godtagbart enkelt resonemang som visar att $x = 2$ är en rot till ekvationen +1 E_R

b) Godtagbar ansats, t ex faktoriserar $x^3 + 2x^2 + x - 18$ och kommer fram till att övriga rötter fås ur ekvationen $x^2 + 4x + 9 = 0$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = -2 \pm i\sqrt{5}$) +1 C_P

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 C_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

17. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, utvecklar de två första termerna korrekt,
$\sqrt{2}(\sin x \cos 45° + \cos x \sin 45°)$ respektive $\sqrt{2}(\sin x \cos 45° - \cos x \sin 45°)$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0) +1 C_P

18. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, deriverar korrekt, t ex $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2x(x^2-3)^{-\frac{3}{2}}$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (-2) +1 C_P

19. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex jämför belopp *eller* argument för de två komplexa talen +1 C_R

med i övrigt välgrundat resonemang som visar att inget sådant heltal n existerar +1 C_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

20. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t ex kommer fram till slutsatsen att $f'(x)$ innehåller faktorn $x+3$ +1 A_R

med godtagbar fortsättning, bestämmer derivatans andra nollställe, $x = \frac{3}{2}$ +1 A_R

med i övrigt välgrundat och nyanserat resonemang som visar att lokalt maximum saknas +1 A_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

21. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, ställer upp ett uttryck för arean och bestämmer derivatans nollställe, $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning, inklusive verifiering av maximum, med korrekt svar $\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$ +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 A_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

Instruktioner för bedömning av delprov D

22. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex anger att $y'(2,5)$ ska bestämmas +1 E_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4,40) +1 E_P

23. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer skärningspunktens x-koordinat, $x = 1,672$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4,46 a.e.) +1 E_{PL}

Kommentar: Även svar utan enhet anses godtagbart.

24. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex anger att antalet besökare bestäms av integralen

$$\int_0^{120} (280 + (210 + 0,583x)\cos\frac{\pi x}{40})\,dx$$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (33 400) +1 E_M

25. **Max 0/4/0**

a) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt integral, $\int_0^{20} \frac{1}{620} e^{-\frac{t}{620}}\,dt$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3 %) +1 C_M

b) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt ekvation, t ex

$$\int_0^{x} \frac{1}{620} e^{-\frac{t}{620}}\,dt = 0,5$$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (430 år) +1 C_{PL}

26. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, bestämmer en relevant rotationsvolym med integral
eller
anger att sökt volym kan erhållas som differensen mellan cylinderns volym och urgröpningens volym samt bestämmer cylinderns volym +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($20,4\ dm^3$) +1 C_M

27.		**Max 0/2/1**
a)	Godtagbar ansats, bestämmer minst en av konstanterna korrekt	+1 C_B
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($A = 0{,}15$, $B = 0{,}40$ och $k = \pi$)	+1 C_B
b)	Godtagbar lösning med godtagbart svar (0,47 m/s)	+1 A_M
	Kommentar: Även svaret $-0{,}47$ m/s anses godtagbart.	

28.		**Max 0/2/2**
	Godtagbar ansats, ställer upp kedjeregeln *och* sätter in $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ eller sätter in $\frac{dr}{dt} = 3{,}5$, t ex $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot 3{,}5$	+1 C_M
	med godtagbar fortsättning, beräknar $\frac{dV}{dt}$, 1583 cm^3/s	+1 C_M
	med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,5 s)	+1 A_M
	Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga”	+1 A_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

29.		**Max 0/0/2**
	Godtagbar ansats, bestämmer $h'(x)$ korrekt, $h'(x) = f'(x) \cdot (g(x))^3 + f(x) \cdot 3(g(x))^2 \cdot g'(x)$	+1 A_P
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (4)	+1 A_P

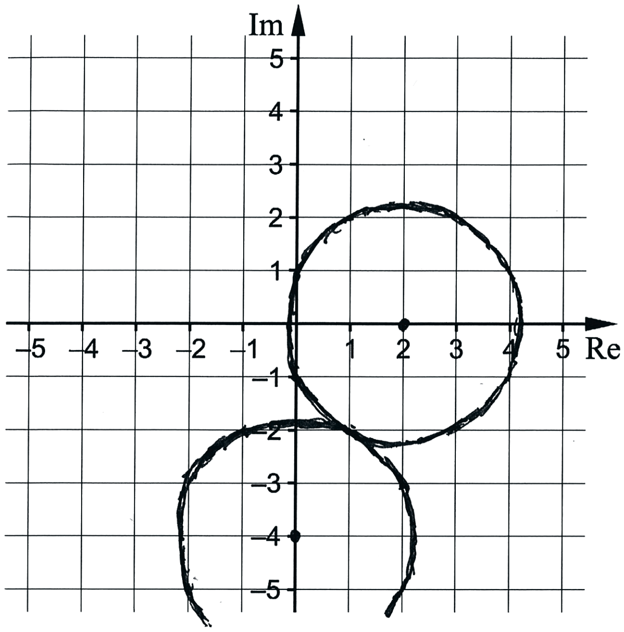
30.		**Max 0/0/2**
	Godtagbar ansats, t ex tecknar uttrycket $x = L \tan Ct$	+1 A_M
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\frac{dx}{dt} = \frac{CL}{\cos^2 Ct}\right)$	+1 A_M
	Kommentar: Även svaret $\frac{dx}{dt} = \frac{CL}{\cos^2 \alpha}$ godtas.	

3. Exempel på bedömda elevlösningar

I det här kapitlet finns exempel på bedömda elevlösningar till vissa uppgifter i provet samt kommentarer till exemplen som stöd för bedömningen.

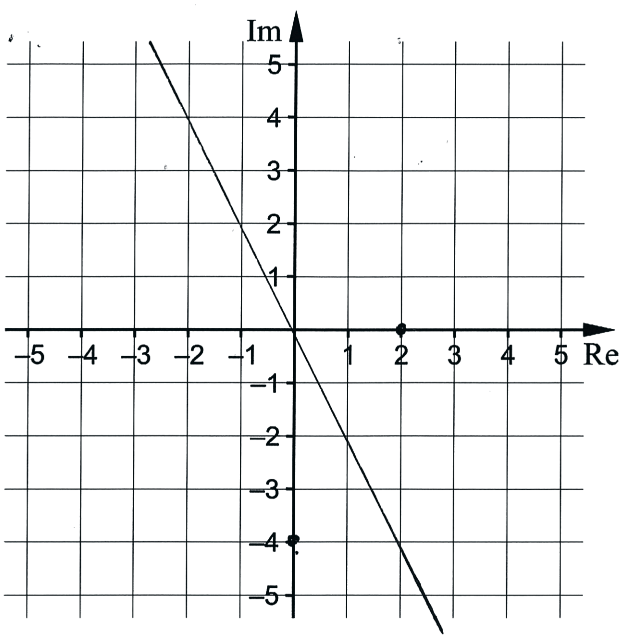
Uppgift 12

Elevlösningsexempel 12.1 (0 poäng)



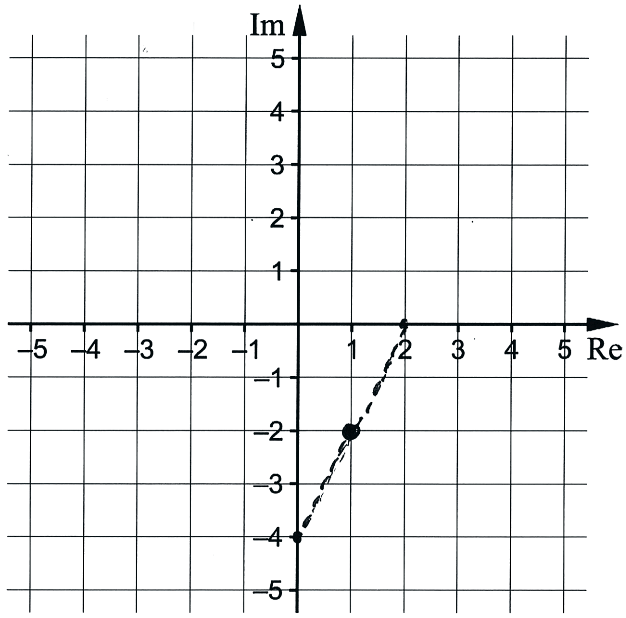
Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen visar två hjälpcirklar men det framgår inte för vilka komplexa tal likheten gäller vilket gör att lösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 12.2 (1 A_B)



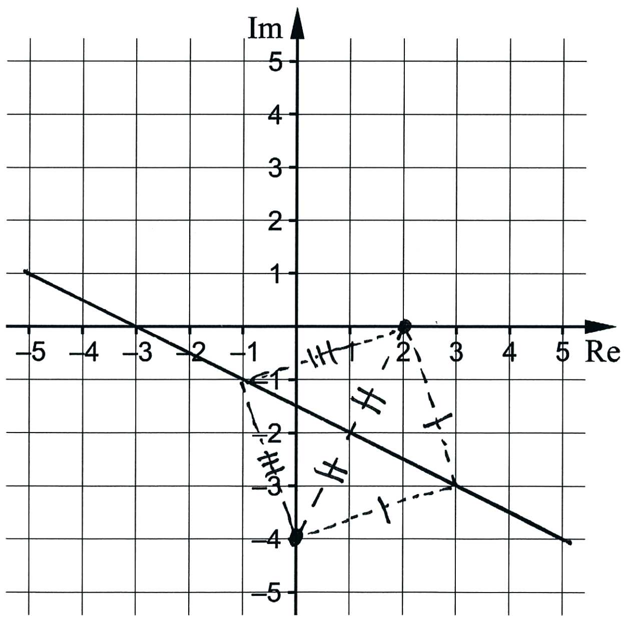
Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen visar en linje med fel lutning men som går genom $1-2i$ vilket gör att kraven för begreppspoängen på A-nivå anses vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 12.3 (1 AB)



Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen visar en hjälpsträcka som går genom 1 – 2i vilket gör att kraven för begreppspoängen på A-nivå anses vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 12.4 (1 AB och 1 APL)



Bedömningskommentar till exemplet: Grafen innehåller den korrekta linjen. De övriga markeringarna anses vara hjälpkonstruktioner som inte ingår i svaret. Därmed uppfylls kraven för de båda poängen.

Uppgift 15

Elevlösningsexempel 15.1 (1 EB)

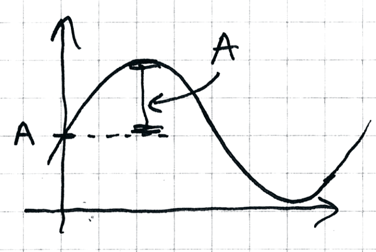
Det största värdet = A + A = 2A
vilket betyder att det största värdet är
dubbelt så stort som det positiva värdet på A.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen konstateras att största värdet är $A + A = 2A$ vilket motsvarar kraven för begreppspoängen på E-nivå. Dock saknas förklaring till varför detta uttryck gäller. Därmed anses inte kraven för resonemangspoängen på E-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 15.2 (1 EB och 1 ER)

Det största värdet är vid punkten "A"
med en höjning av A. Största värdet blir 2A.

Ex.



Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen ges en förklaring till varför största värdet är $2A$. Den förklarande texten är något svårtolkad men detta vägs upp av en förtydligande figur. Sammantaget ges lösningen en begreppspoäng och en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 15.3 (1 EB och 1 ER)

Då det är största värdet kommer sin(x) = 1
Vilket gör formeln till:
A · 1 + A ⇒ A + A = 2A

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen ges det godtagbara argumentet ”Då det är största värdet kommer $\sin(x) = 1$” varpå funktionsvärdet då $\sin(x) = 1$ bestäms till $2A$. Sammantaget ges lösningen en begreppspoäng och en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 16

Elevlösningsexempel 16.1 (1 E_R och 2 C_P)

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0$

$x = 2$ är en rot om $f(2) = 0$

$f(2) = \underbrace{8+8}_{16} + \underbrace{2-18}_{-16} = 0$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 4x + 9 \\
\hline
x - 2 & x^3 + 2x^2 + x - 18 \\
 & -x^3 - 2x^2 \\
\hline
 & 4x^2 + x \\
 & -4x^2 - 8x \\
\hline
 & 0 \quad 9x - 18 \\
 & -9x - 18 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Faktorisera $x^2 + 4x + 9$ via p-q formel

$x^2 + 4x + 9 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{4-9}$

$= -2 \pm \sqrt{-5}$

$= -2 \pm i\sqrt{5}$

Svar: $x_1 = 2$

$x_2 = -2 + i\sqrt{5}$

$x_3 = -2 - i\sqrt{5}$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas att $x = 2$ är en rot och de två övriga rötterna bestäms. När det gäller kommunikation saknas förklaring till varför polynomdivision med $x - 2$ utförs, på första raden sätts $f(x) = 0$ efter funktionsuttrycket och parenteser saknas i polynomdivisionen. Detta gör att kraven för kommunikationspoängen på C-nivå inte anses uppfyllda. Sammantaget ges en resonemangspoäng på E-nivå i deluppgift a) och två procedurpoäng på C-nivå i deluppgift b).

Elevlösningsexempel 16.2 (1 E_R, 2 C_P och 1 C_K)

$$x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0$$

a) $2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 - 18 = 8 + 8 + 2 - 18 = 0$

2 är en rot till $x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0$

b) Om 2 är en rot är $x-2$ en faktor

$$\begin{array}{l|l} \quad x^2 + 4x + 9 & \\ \hline x^3 + 2x^2 + x - 18 & x-2 \\ -(x^3 - 2x^2) & \\ \hline 4x^2 + x - 18 & \\ -(4x^2 - 8x) & \\ \hline 9x - 18 & \\ -(9x - 18) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2 + 4x + 9 = 0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{4-9}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{-5}$$

$$x = -2 \pm i\sqrt{5}$$

$$x_1 = -2 + i\sqrt{5}$$

$$x_2 = -2 - i\sqrt{5}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas att $x = 2$ är en rot och de två övriga rötterna bestäms. När det gäller kommunikation nämns inte faktorsatsen men ”Om 2 är en rot är $x - 2$ en faktor” anses vara tillräckligt för att förklara varför polynomdivision med $x - 2$ utförs. Sammantaget anses kraven för kommunikationspoäng vara uppfyllda.

Uppgift 19

Elevlösningsexempel 19.1 (2 C_R)

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ $\qquad$ $z_2 = -8i$

$(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 2(\cos 45° + i \sin 45°)$ $\qquad$ $-8i = 8(\cos \underline{270}° + i \sin \underline{270}°)$

$(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = 4(\cos 90° + i \sin 90°)$

$(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3 = \underline{8} (\cos \underline{135}° + i \sin \underline{135}°)$

lika $\qquad$ Olika

Svar: Nej. finns inte

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen skrivs båda talen på polär form och genom prövning bestäms n så att beloppet av z_1^n blir lika med beloppet av z_2. Därefter jämförs belopp och argument och en korrekt slutsats dras. Trots att lösningen är något knapphändig anses den nätt och jämnt uppfylla kraven för de två resonemangspoängen på C-nivå.

Uppgift 20

Elevlösningsexempel 20.1 (2 AR)

$f(x) = 2x^4 - 27x^2 + 54x$

$f'(x) = 8x^3 - 54x + 54$

$8x^3 - 54x + 54 = 0$ $\qquad x = -3 \Rightarrow (x+3)$

$$\begin{array}{l} \quad 8x^2 - 24x + 18 \\ \hline 8x^3 - 54x + 54 \;\Big|\; x+3 \\ -(8x^3 + 24x^2) \\ \hline \quad -24x^2 - 54x \\ \quad -(-24x^2 - 72x) \\ \hline \qquad 18x + 54 \\ \qquad -(18x + 54) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

pq: $8x^2 - 24x + 18 = 0$

$x^2 - 3x + \frac{18}{8} = 0$

$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{18}{8}}$

$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{18}{8}}$

$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{18}{8} - \frac{18}{8}}$

$x = \frac{3}{2}$

$f''(x) = 24x^2 - 54$

$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 24\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 54$

$= 24\left(\frac{9}{4}\right) - 54$

$= \frac{216}{4} - 54$

$= \frac{216}{4} - \frac{216}{4} = 0$

Svar: funktionen har en terasspunkt

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen dras, om än knapphändigt redovisat, slutsatsen att $f'(x)$ innehåller faktorn $x+3$. Därefter bestäms faktorn $8x^2 - 24x + 18$ och dess enda nollställe $x = \frac{3}{2}$. För att avgöra karaktären bestäms andraderivatan $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ men detta är inte tillräckligt för att avgöra att det är en terrasspunkt. Lösningen anses därmed inte uppfylla kraven för den tredje resonemangspoängen på A-nivå. Sammantaget ges lösningen två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 21

Elevlösningsexempel 21.1 (2 A_{PL})

$$y = x \cdot -2 \ln x$$

$$y' = -2 \ln x - 2 \qquad y' = 0$$

$$\ln x = -1$$

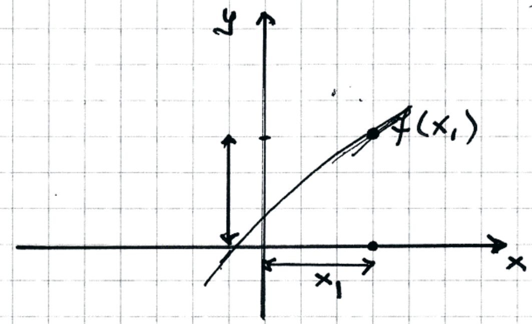
$$x = e^{-1}$$

$$y'' = -\frac{2}{x} < 0 \Rightarrow \text{max}$$

$$y = -2e^{-1} \ln e^{-1} = 2e^{-1}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av största arean. När det gäller kommunikation är lösningen knapphändig. Bland annat saknas förklarande text helt vilket gör att lösningen inte är lätt att följa. Lösningen anses därmed inte uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 21.2 (2 APL och 1 AK)



$$A = b \cdot x_1 = f(x_1) \cdot x_1 \Rightarrow A = -2\ln x_1 \cdot x_1$$

$$A' = -\frac{2}{x_1} \cdot x_1 + (-2\ln x_1 \cdot 1) = -\frac{2x_1}{x_1} - 2\ln x_1 = -2 - 2\ln x_1$$

$$-2 - 2\ln x_1 = 0$$

$$2(-1 - \ln x_1) = 0$$

$$-1 - \ln x_1 = 0$$

$$-1 = \ln x_1$$

$$x_1 = e^{-1}$$

$$A'' = -\frac{2}{x_1} \Rightarrow A''(e^{-1}) = -\frac{2}{e^{-1}} = -2e$$

$$A'' < 0 \Rightarrow \text{max. punkt}$$

$$A = -2\ln x_1 \cdot x_1 = -2\ln\left(\frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{e}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms areans maximala värde korrekt. När det gäller kommunikation är funktionens graf felaktig men figuren visar ändå principiellt hur uttrycket för arean fås. I övrigt är lösningen lätt att följa och förstå. Kraven för kommunikationspoäng på A-nivå anses vara uppfyllda.

Uppgift 28

Elevlösningsexempel 28.1 (2 C_M och 1 A_M)

$V = \frac{4\pi r^3}{3}$ $\qquad r' = 3{,}5\ cm/s = 0{,}35\ dm/s$

$V' = \frac{4\pi 3r^2}{3} = 4\pi r^2$

$V' = 4\pi r^2 \cdot r'$

$= 4\pi \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}35 = 1{,}583\ dm^3/s$

Konstant hastighet $\rightarrow V' = \frac{V}{t} \rightarrow t = \frac{V}{V'}$

$t = \frac{V}{V'} = \frac{5{,}5\ dm^3}{1{,}583\ dm^3/s} = \underline{\underline{3{,}47\ s}}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en korrekt bestämning av den efterfrågade tiden. När det gäller kommunikation används beteckningen V' för såväl $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ som $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ vilket medför att lösningen inte är helt lätt att följa och förstå. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på C-nivå och en modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 28.2 (2 C_M, 1 A_M och 1 A_K)

$V = 5{,}5$ liter $\qquad \frac{dr}{dt} = 3{,}5$ cm/s $= 0{,}35$ dm/s

då $r = 0{,}6$ dm

$V = 4\pi r^3/3$

liter $=$ dm^3

$$\frac{dV}{dr} = V' = \frac{3 \cdot 4\pi r^2}{3} = 4\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}35 = 1{,}58 \text{ liter/s}$$

Konstant hastighet: $V = \frac{dV}{dt} \cdot t$

$$t = \frac{5{,}5}{1{,}58} = \underline{3{,}47\,s}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt. När det gäller kommunikation används symboler och beteckningar korrekt. Det saknas förklarande text vilket gör lösningen något otydlig men trots denna brist anses kraven för kommunikationspoäng på A-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda. Elevlösningen ges samtliga möjliga poäng.