Part B	Problems 1-10 which only require answers.
Part C	Problems 11-20 which require complete solutions.
Test time	150 minutes for Part B and Part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of three written parts (Part B, Part C and Part D).
Together they give a total of 61 points consisting of
22 E-, 22 C- and 17 A-points.

Level requirements for test grades
E: 15 points
D: 24 points of which 7 points on at least C-level
C: 31 points of which 12 points on at least C-level
B: 41 points of which 5 points on A-level
A: 49 points of which 9 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A- point.

For problems labelled *"Only answer is required"* you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: ____

Date of birth: ____

Educational programme: ________________________________

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required*. Write your answers in the test booklet.

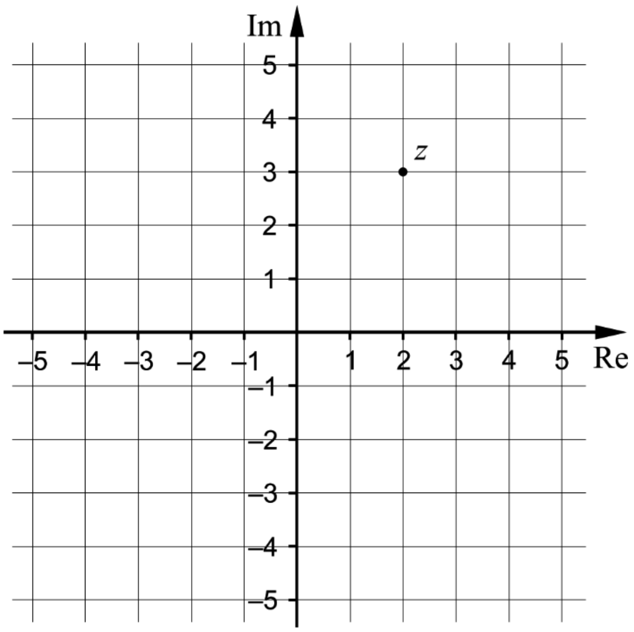
1. It holds for the function f that $f(x) = 5\sin 4x + 3$

a) Find the largest possible value of the function.

_______________________ (1/0/0)

b) Find $f'(x)$. _______________________ (1/0/0)

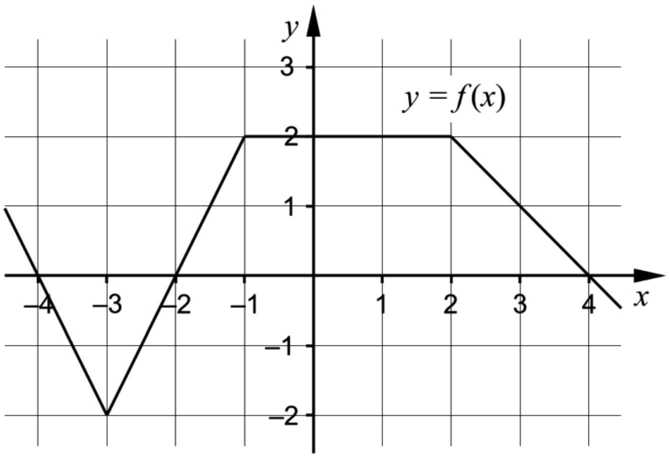
2. The complex number z is marked in the complex plane.



a) Mark the number $\overline{z}$ in the complex plane. (1/0/0)

b) Find $z \cdot \overline{z}$ _______________________ (1/0/0)

3. The figure shows the graph of a function f.



Find $\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ ______________________ (1/0/0)

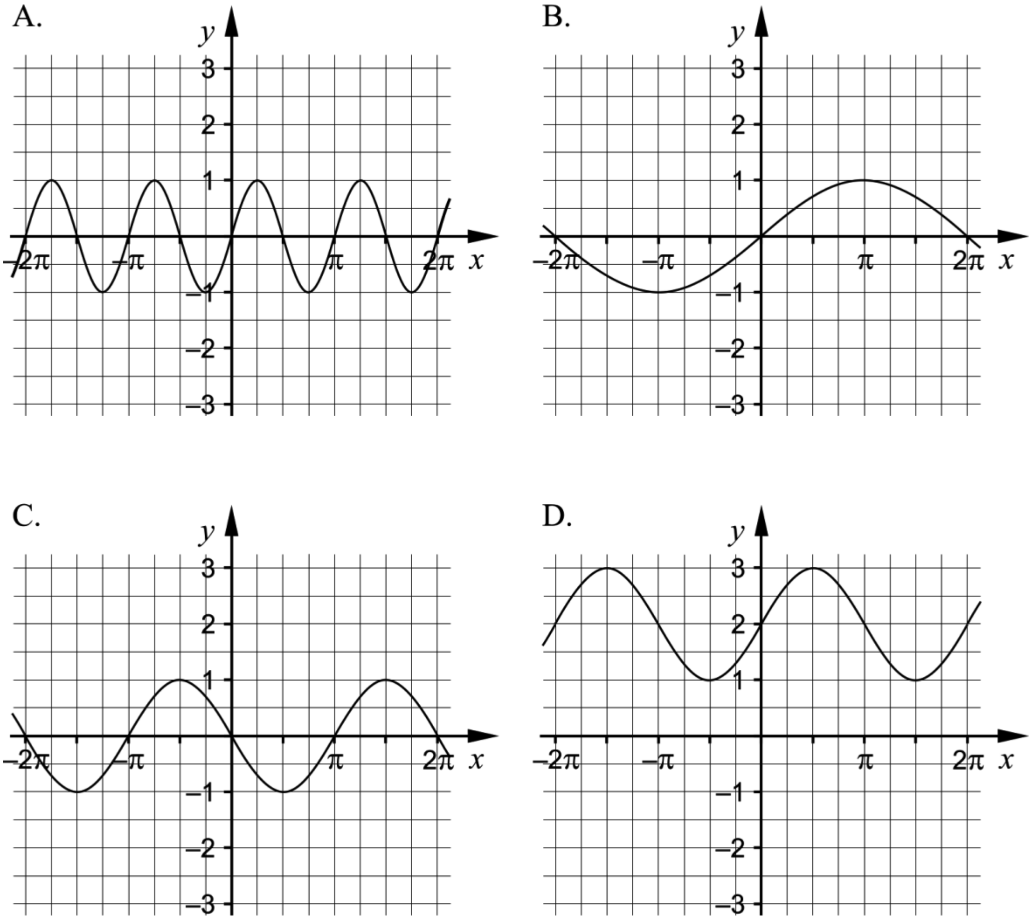
4. It holds for the complex numbers z and w that

$z = 7\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ and $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

a) Find $\left|\frac{z}{w}\right|$ ______________________ (1/0/0)

b) Find $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$ ______________________ (1/0/0)

5. The figures show the graphs of four trigonometric functions.



a) Match the following three functions with the corresponding graphs A–D.

$y = \sin(x) + 2$ corresponds to graph: ______________________

$y = \sin(2x)$ corresponds to graph: ______________________

$y = \sin(x + \pi)$ corresponds to graph: ______________________ (0/1/0)

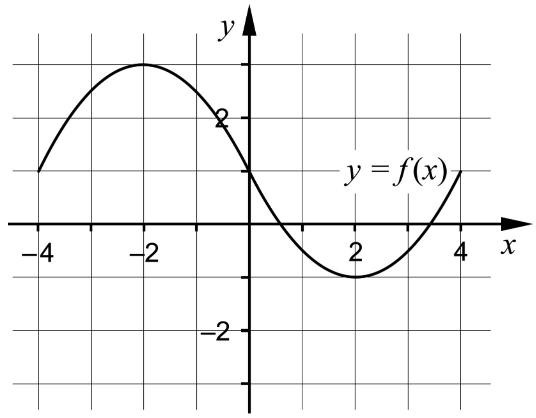
b) One of the graphs A–D does not correspond to any of the three functions in a).
Write down a trigonometric function for this graph.

______________________ (0/1/0)

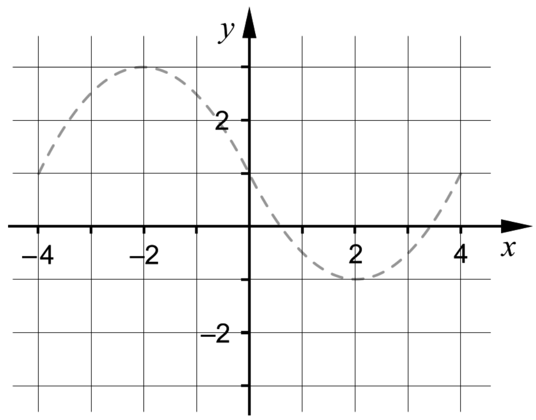
6. Determine the constant a so that the polynomial $p(x) = x^5 + 2x^4 - 8x + a$ is divisible by the factor $(x-1)$.

______________________ (0/1/0)

7. In the coordinate system, the curve $y = f(x)$ is drawn on the interval $-4 \le x \le 4$



Use the coordinate system below to sketch the curve $y = |f(x)|$ on the interval $-4 \le x \le 4$
To make your sketching easier, the curve $y = f(x)$ has been drawn with a dashed line.



(0/1/0)

8. $z_1 = \cos 35° + i \sin 35°$ is a root of the equation $z^9 = w$.
Find another root of the same equation. ______________________ (0/0/1)

9. Which of the alternatives A–H is the best approximate value of

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{3}+0.01)-\sin\frac{\pi}{3}}{0.01}\ ?$$

A. 0
B. 0.01
C. 0.5
D. 1
E. 2
F. 10
G. 50
H. 100

______________________ (0/0/1)

10. Give an example of a function f with the derivative
$f'(x) = 24x(x^2+1)^5$

______________________ (0/0/1)

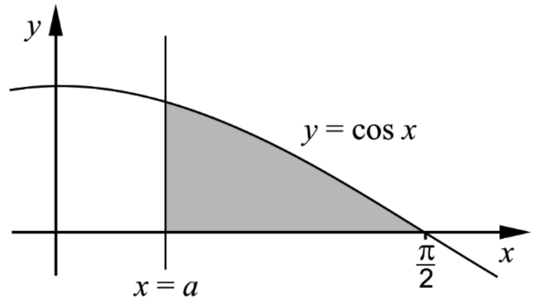
Part C: Digital resources are not allowed. Write your solutions on separate sheets of paper.

11. Calculate $\dfrac{3+5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$. Give your answer in the form $a+b\mathrm{i}$. (2/0/0)

12. Solve the equation $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2/1/0)

13. Show that $\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \tan x$ for all x where the expressions are defined. (2/0/0)

14. The shaded region in the figure is bounded by the curve $y = \cos x$, the x-axis and the line $x = a$, where $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$



Determine a so that the area of the region is $\dfrac{1}{2}$ a.u. (2/1/0)

15. The revenue when selling a product is given by
$I(p) = 2000p \cdot \mathrm{e}^{-0.05p}$
where I is the revenue in SEK/day and p is the price of the product in SEK.

Decide whether there is a price p which gives a maximum revenue, and if so, what is this price? (0/3/0)

16. Parham works with the differential equation $y'' + 8y = 6y'$. He concludes that $y = 4e^{2x}$ is a solution to the equation and shows the result to Aida. Aida studies the equation and says that it cannot be true. She claims that the numbers 4 and 2 have accidentally changed places in Parham's solution, because the solution should be $y = 2e^{4x}$ according to Aida.

Investigate whether either of them is wrong. (0/2/0)

17. The curve $y = h - x^2$, where h is a positive constant, bounds together with the coordinate axes a region in the first quadrant.

Find h so that the area of the region is $\frac{16}{3}$ a.u. (0/1/1)

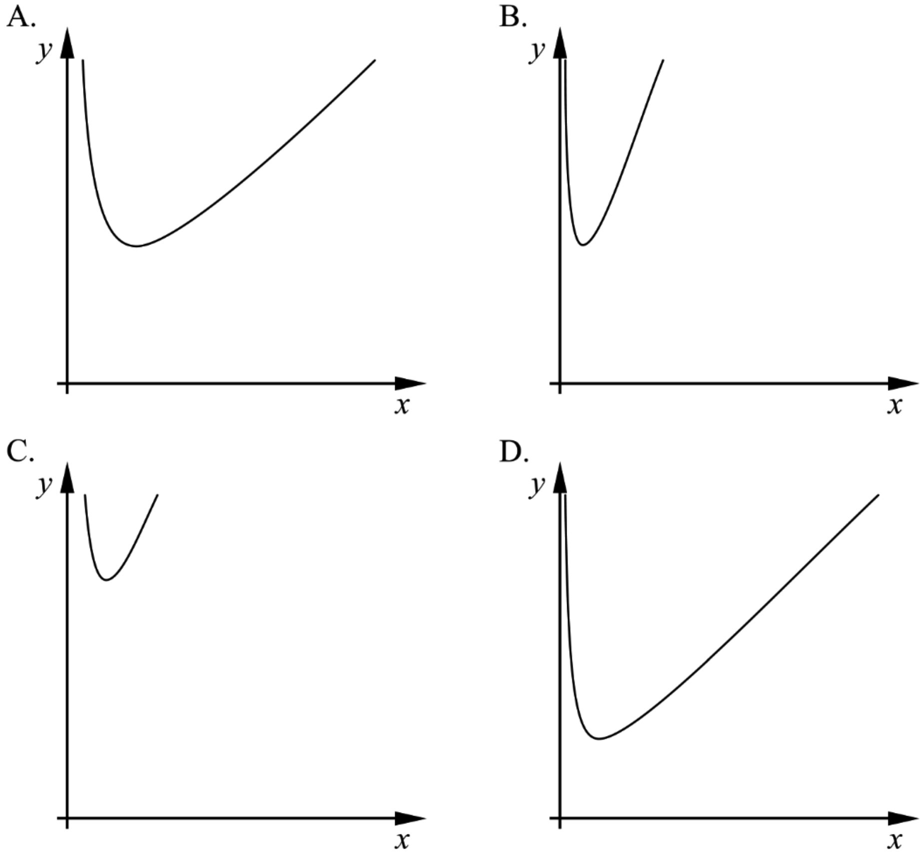
18. Show that $\sin 345° = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ (0/0/2)

19. Determine the smallest value that the function $y = e^{\sin x \cos x}$ can have. Give an exact answer. (0/0/2)

20. The functions f_1, f_2, f_3 and f_4 are defined as follows:

$f_1(x) = \dfrac{1}{x} + x$	$f_2(x) = \dfrac{1}{x} + 3x$
$f_3(x) = \dfrac{1}{3x} + x$	$f_4(x) = \dfrac{1}{3x} + 3x$

The figures below show the graphs A–D of the functions for $x > 0$
All graphs are drawn to the same scale in the coordinate systems.



Match each function $f_1 - f_4$ with the corresponding graph A–D. Justify your answer. (0/0/2)

Part D	Problems 21-28 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of three written parts (Part B, Part C and Part D).
Together they give a total of 61 points consisting of
22 E-, 22 C- and 17 A-points.

Level requirements for test grades
E: 15 points
D: 24 points of which 7 points on at least C-level
C: 31 points of which 12 points on at least C-level
B: 41 points of which 5 points on A-level
A: 49 points of which 9 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A- point.

For problems labelled *"Only answer is required"* you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

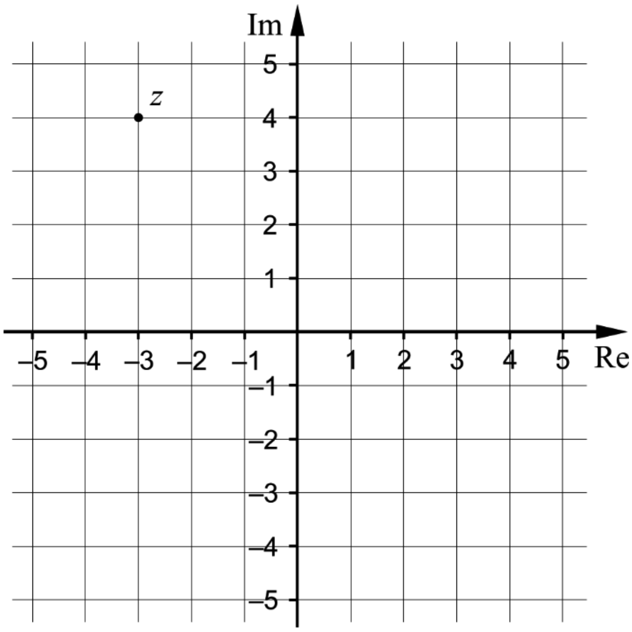
Name: ______________________________

Date of birth: ______________________________

Educational programme: ______________________________

Part D: Digital resources are allowed. Write your solutions on separate sheets of paper.

21. The figure shows a complex plane where the number z has been marked.



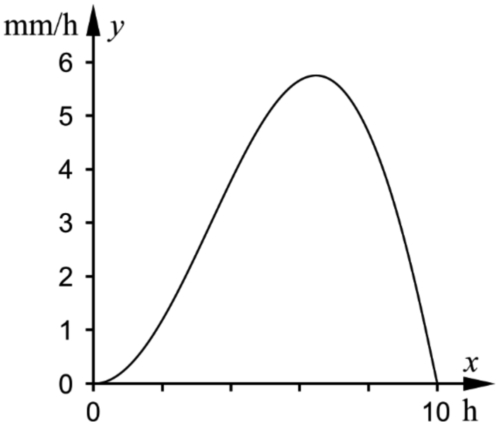
Determine the number z in polar form. (2/0/0)

22. One summer day in Pajala it was raining between 9:00 a.m. and 7:00 p.m. During these 10 hours the intensity of the rain was measured.

According to a simplified model the intensity of the rain is given by

$y = x \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{10}$

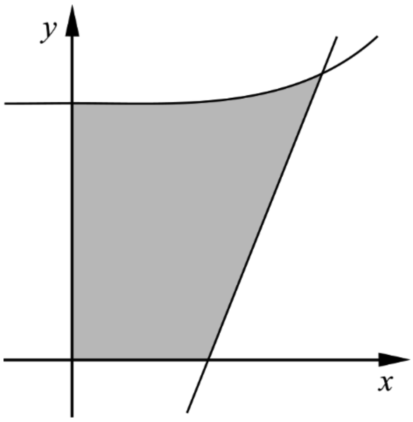
where y is the intensity of the rain in mm/h and x is the time in hours from 9:00 a.m. The model is assumed to be valid between 9:00 a.m. and 7:00 p.m.



Calculate how many mm of rain in total fell during these 10 hours. (2/0/0)

23. The figure shows the graphs of the functions $f(x) = \frac{x^4}{4} + 1.5$ and $g(x) = 4x - 2$

The shaded region in the figure is bounded by the two graphs of the functions and the positive coordinate axes.



Determine the area of the shaded region.
Give your answer to at least three significant figures. (2/1/0)

24. During a cloudless day with 12 hours of sunlight, the intensity I of the sunlight can be approximated by $I = I_0 \sin^3\left(\frac{\pi x}{12}\right)$

where I_0 is the maximum intensity and x is the time in hours after sunrise.

a) Determine what percentage of its maximum intensity the sunlight has 3 hours after sunrise. (1/0/0)

A dermatologist recommends that sun protection is used if the intensity exceeds 50% of the maximum intensity.

b) Determine for how many hours sun protection should be used on this day according to the recommendation. (0/2/0)

25. It holds for the function f that $f''(x) = \cos x - \sin 2x$
At the point $(0,\ 1)$, the graph of the function f has the tangent $y = 2x + 1$

Find $f'(x)$. (0/3/0)

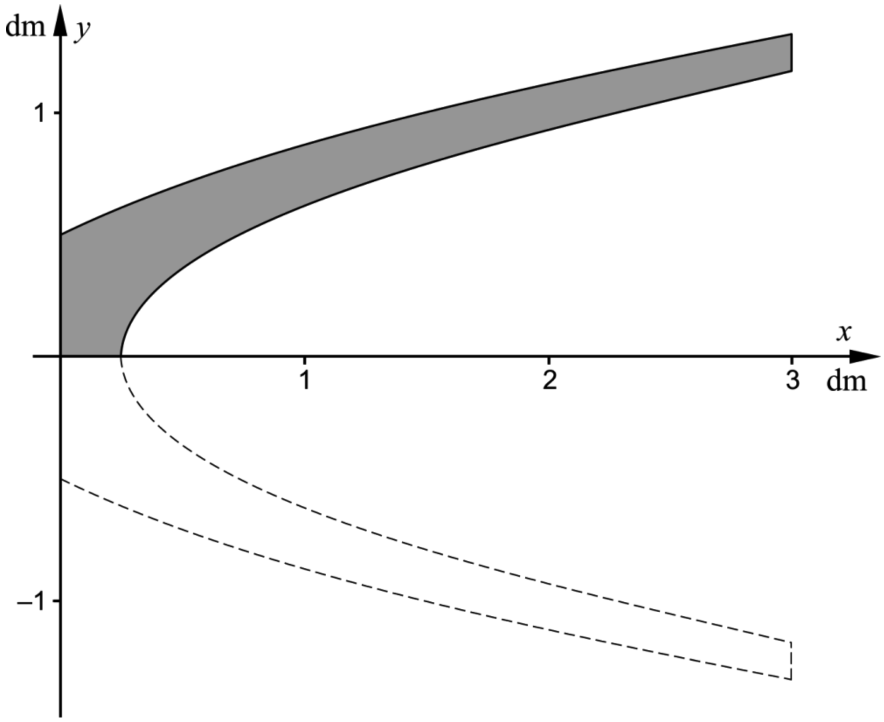
26. The party organisers Skoj & Ploj fill balloons with an air compressor.

The balloons can be considered to be spherical and each balloon should be filled to the volume 5.5 litres. The radius of the balloon increases at 3.5 cm/s at the time when the radius is 6.0 cm.

The air compressor fills the balloon with air smoothly so that the volume increases at a constant speed.

Determine how long it takes to fill a balloon which is empty at the beginning. (0/2/2)

27. Simone is a glass designer and has designed a vase that is 3 dm high. The shape of the vase can be described by the solid of revolution which appears when the shaded region in the figure is rotated around the x-axis. The shaded region is bounded by the curves $y_1 = \frac{\sqrt{2x+1}}{2}$, $y_2 = \frac{\sqrt{2x-0.5}}{2}$, the line $x = 3$ and the positive coordinate axes.



Simone wants to know how much frit she needs to produce the vase.

Calculate the volume of frit she needs. (0/1/2)

28. The function h is defined by $h(x) = (f(x))^2$.

Find $h''(0)$ for all functions f with the following properties:

- $f(0) = -1$
- $f'(0) = 3$
- $f''(0) = 2$ (0/1/3)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \approx, \pm, \sqrt{}, f(x), f'(x), f''(x), x, y, (\ ), [\ ], \int, \mathrm{d}x$, gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v$, $\sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differentialekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabell, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 13_1 och 13_2 den första respektive andra poängen i uppgift 13.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
B	1a	1											
	1b		1										
	2a	1											
	2b	1											
	3	1											
	4a	1											
	4b	1											
	5a					1							
	5b					1							
	6							1					
	7					1							
	8									1			
	9									1			
	10											1	
C	11_1		1										
	11_2		1										
	12_1		1										
	12_2		1										
	12_3						1						
	13_1				1								
	13_2				1								
	14_1			1									
	14_2			1									
	14_3								1				
	15_1						1						
	15_2						1						
	15_3								1				
	16_1								1				
	16_2								1				
	17_1							1					
	17_2											1	
	18_1												1
	18_2												1
	19_1											1	
	19_2											1	
	20_1												1
	20_2												1
D	21_1		1										
	21_2		1										
	22_1			1									
	22_2			1									
	23_1			1									
	23_2			1									
	23_3							1					
	24a			1									
	24b_1							1					
	24b_2							1					
	25_1						1						
	25_2							1					
	25_3								1				
	26_1							1					
	26_2							1					
	26_3											1	
	26_4												1
	27_1							1					
	27_2											1	
	27_3											1	
	28_1						1						
	28_2										1		
	28_3										1		
	28_4												1
	Total	**6**	**7**	**7**	**2**	**3**	**5**	**9**	**5**	**2**	**2**	**7**	**6**
Σ	**61**	**22**				**22**				**17**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Del-prov	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma4															
					Aritmetik, algebra och förändring								Samband och förändring					Problem-lösning		
		E	C	A	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	F17	F18	F19	F20	F21	P1	P3	P4
B	1a	1	0	0									X							
	1b	1	0	0											X					
	2a	1	0	0		X	X													
	2b	1	0	0	X	X	X													
	3	1	0	0												X				
	4a	1	0	0	X		X													
	4b	1	0	0	X															
	5a	0	1	0									X							
	5b	0	1	0									X							
	6	0	1	0					X									X		
	7	0	1	0									X							
	8	0	0	1	X	X		X												
	9	0	0	1						X					X					
	10	0	0	1											X			X		
C	11	2	0	0	X															
	12	2	1	0							X									
	13	2	0	0						X		X								
	14	2	1	0							X					X		X		
	15	0	3	0											X					
	16	0	2	0													X			
	17	0	1	1												X		X		
	18	0	0	2						X		X								
	19	0	0	2						X			X		X			X		
	20	0	0	2										X						
D	21	2	0	0	X	X	X													
	22	2	0	0												X		X	X	
	23	2	1	0												X		X		
	24a	1	0	0									X							
	24b	0	2	0							X		X							
	25	0	3	0											X			X		
	26	0	2	2											X			X	X	
	27	0	1	2												X		X	X	
	28	0	1	3											X					
Total		22	22	17																

Kravgränser

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 22 E-, 22 C- och 17 A-poäng.
Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla tre delprov.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 31 poäng varav 12 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Bedömningsformulär

Elev:____________________________ **Klass:**________________ **Provbetyg:**_____________

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
B	1a												
	1b												
	2a												
	2b												
	3												
	4a												
	4b												
	5a												
	5b												
	6												
	7												
	8												
	9												
	10												
C	11_1												
	11_2												
	12_1												
	12_2												
	12_3												
	13_1												
	13_2												
	14_1												
	14_2												
	14_3												
	15_1												
	15_2												
	15_3												
	16_1												
	16_2												
	17_1												
	17_2												
	18_1												
	18_2												
	19_1												
	19_2												
	20_1												
	20_2												

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	21_1												
	21_2												
	22_1												
	22_2												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	24a												
	24b_1												
	24b_2												
	25_1												
	25_2												
	25_3												
	26_1												
	26_2												
	26_3												
	26_4												
	27_1												
	27_2												
	27_3												
	28_1												
	28_2												
	28_3												
	28_4												
	Total												
Σ													

	Total	**6**	**7**	**7**	**2**	**3**	**5**	**9**	**5**	**2**	**2**	**7**	**6**
Σ	**61**	**22**				**22**				**17**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Delprov B

1.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar (8)	+1 E_B
b)	Korrekt svar ($f'(x) = 20\cos 4x$)	+1 E_P
2.		**Max 2/0/0**
a)	Godtagbart markerad punkt ($2-3i$)	+1 E_B
b)	Korrekt svar (13)	+1 E_B
3.		**Max 1/0/0**
	Godtagbart svar (2)	+1 E_B
4.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar (3,5)	+1 E_B
b)	Korrekt svar $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	+1 E_B
5.		**Max 0/2/0**
a)	Korrekt svar (D, A och C)	+1 C_B
b)	Godtagbart svar ($y = \sin\frac{x}{2}$)	+1 C_B
6.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar (5)	+1 C_{PL}

7. **Max 0/1/0**

Godtagbart skissad graf +1 C_B

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

8. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (t ex $\cos 75° + i\sin 75°$) +1 A_B

9. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (Alternativ C: 0,5) +1 A_B

10. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (t ex $f(x) = 2(x^2+1)^6$) +1 A_{PL}

Delprov C

11. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, förlänger med nämnarens konjugat +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($4 + i$) +1 E_P

12. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer minst en lösning till ekvationen korrekt +1 E_P

med godtagbar fortsättning, bestämmer minst två lösningar till ekvationen korrekt, t ex $x = 20° + n \cdot 120°$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = 20° + n \cdot 120°$ och $x = 40° + n \cdot 120°$) +1 C_P

13. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex skriver om täljaren med trigonometriska ettan +1 E_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

14. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, t ex tecknar en ekvation för bestämning av a,

$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ +1 E_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

15. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer derivatan korrekt,
$I'(p) = 2000(1 - 0,05p)\mathrm{e}^{-0,05p}$ +1 C_P

med godtagbar fortsättning, t ex bestämmer derivatans nollställe, $p = 20$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning, inklusive verifiering av maximum, med korrekt slutsats (”Ja, 20 kr”) +1 C_R

16. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, visar att Parhams *eller* Aidas förslag är en lösning till differentialekvationen +1 C_R

med i övrigt välgrundat resonemang som stödjer slutsatsen att ingen har fel +1 C_R

17. **Max 0/1/1**

Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt integral med gränser,

$\int_0^{\sqrt{h}} (h - x^2) \, \mathrm{d}x$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (4) +1 A_{PL}

18. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex gör omskrivningen
$\sin 345° = -\sin 15° = -\sin(45° - 30°)$ +1 A_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 A_R

19. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, skriver om exponenten med formeln för dubbla vinkeln	+1 A_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($e^{-\frac{1}{2}}$)	+1 A_{PL}

20. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex resonerar korrekt om vad som skiljer graferna för stora x	+1 A_R
med ett i övrigt välgrundat och nyanserat resonemang som leder till korrekt slutsats (f_1 : A, f_2 : C, f_3 : D, f_4 : B)	+1 A_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Delprov D

21. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer $\|z\|$	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($z = 5(\cos 127° + i \sin 127°)$)	+1 E_P

22. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, anger att totala regnmängden bestäms av $\int_0^{10} x \sin \frac{\pi x}{10} \mathrm{d}x$	+1 E_M
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (32 mm)	+1 E_M

23. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer x-koordinaten för skärningspunkten mellan kurvorna, $x \approx 0,9197$	+1 E_{PL}
med korrekt tecknat uttryck för bestämning av någon relevant area, t ex $\int_{0,5}^{0,9197} (4x-2)\,\mathrm{d}x$	+1 E_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1,06 a.e.)	+1 C_{PL}

24. **Max 1/2/0**

a) Godtagbart lösning med godtagbart svar (35 %) $+1\ E_M$

b) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt ekvation eller olikhet $+1\ C_M$

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (5,0 h) $+1\ C_M$

25. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, bestämmer en primitiv funktion till $f''(x)$ $+1\ C_P$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar

($f'(x) = \sin x + \dfrac{\cos 2x}{2} + 1{,}5$) $+1\ C_{PL}$

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 $+1\ C_K$

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

26. **Max 0/2/2**

Godtagbar ansats, ställer upp kedjeregeln och identifierar $\dfrac{dV}{dr}$ *eller* $\dfrac{dr}{dt}$,

t ex $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dr} \cdot 3{,}5$ $+1\ C_M$

med godtagbar fortsättning, beräknar $\dfrac{dV}{dt}$, 1583 cm^3/s $+1\ C_M$

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,5 s) $+1\ A_M$

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 $+1\ A_K$

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

27. **Max 0/1/2**

Godtagbar ansats, ställer upp en integral för bestämning av någon relevant volym, t ex $\displaystyle\int_0^3 \pi \left(\frac{\sqrt{2x+1}}{2} \right)^2 dx$ $+1\ C_M$

med godtagbar fortsättning, t ex ställer upp korrekt uttryck för de integraler som behövs för att bestämma glasmassans volym,

$\displaystyle\int_0^3 \pi \left(\frac{\sqrt{2x+1}}{2} \right)^2 dx$ och $\displaystyle\int_{0,25}^3 \pi \left(\frac{\sqrt{2x-0{,}5}}{2} \right)^2 dx$ $+1\ A_M$

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($3{,}5\ dm^3$) $+1\ A_M$

28. **Max 0/1/3**

Godtagbar ansats, bestämmer $h''(0)$ för ett specialfall *eller*
bestämmer $h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$ +1 C_P

med godtagbar fortsättning,
bestämmer $h''(x) = 2f'(x) \cdot f'(x) + 2f(x) \cdot f''(x)$ +1 A_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (14) +1 A_P

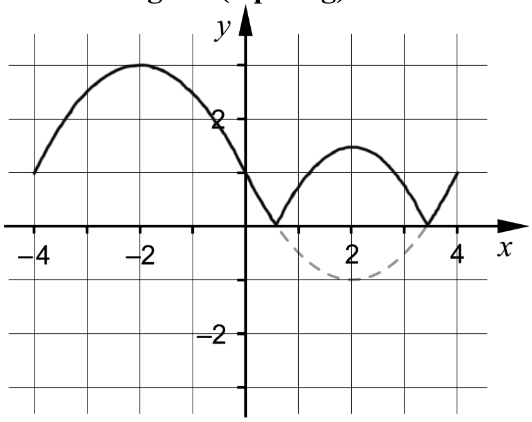
Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Bedömda elevlösningar

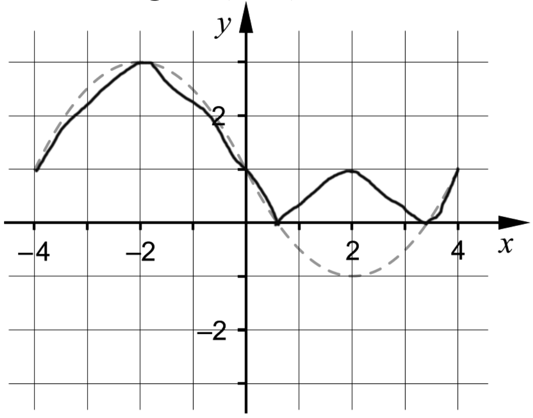
Uppgift 7.

Elevlösning 7.1 (0 poäng)



Kommentar: Skissen är snyggt ritad men i intervallet runt $x = 2$ avviker den för mycket från den korrekta kurvan och från punkten (2, 1). Därmed ges lösningen noll poäng.

Elevlösning 7.2 (1 C_B)



Kommentar: Skissen är något kantig men visar i grova drag hur den korrekta grafen ser ut. Lösningen anses nätt och jämnt uppfylla kraven för begreppspoäng på C-nivå.

Uppgift 13.

Elevlösning 13.1 (1 E_R)

$$\frac{1-\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \tan x$$

$$\frac{1-\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1-\cos^2 x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x \cos x$$

$$1-\cos^2 x = \sin^2 x \quad \text{trig. ettan.}$$

$$\sin^2 x = \sin^2 x$$

$$VL = HL \quad VSV.$$

Kommentar: Elevlösningen bygger från och med rad 3 på likheten som ska visas. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 14.

Elevlösning 14.1 (2 E_{PL})

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_x^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin x = 1 - \sin x$$

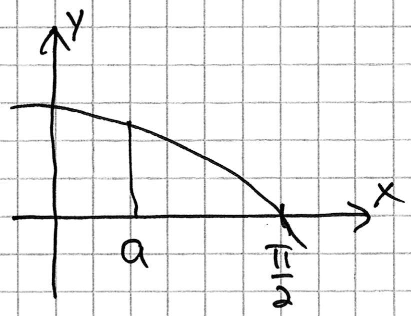
$$a = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} = 1-0{,}5 = 0{,}5 = \frac{1}{2} \text{ a.e.}$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en förenkling av integralen och en bestämning av värdet på a. Att värdet är korrekt verifieras sedan. Detta gör att lösningen uppfyller kraven för de båda problemlösningspoängen. När det gäller kommunikation så har lösningen några brister, x används i två betydelser på rad 1, $a = \pi/6$ konstateras utan motivering och svar saknas. Dessa brister gör att lösningen inte anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösning 14.2 (1 E_{PL} och 1 C_K)

$y = \cos x$



Bestäm a så att områdets area blir $\frac{1}{2}$ a.e.

$$\int_a^{\pi/2} (\cos x)\,dx = \Big[\sin x\Big]_a^{\pi/2}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(a)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(a) = 0{,}5$$

$$\sin(a) = 1 - 0{,}5$$

$$a = \sin^{-1}(0{,}5)$$

Svar: $a = \frac{5\pi}{6}$ eller $a = \frac{\pi}{6}$

Kommentar: Elevlösningen är korrekt fram till slutet då två alternativa värden på *a* ges i svaret. Det gör att lösningen inte uppfyller kraven för den andra problemlösningspoängen. När det gäller kommunikation är lösningen möjlig att följa och förstå och det matematiska språket i huvudsak korrekt. Det felaktiga svaret anses inte påverka bedömningen av kommunikationen. Sammantaget ges lösningen en problemlösningspoäng på E-nivå och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 20.

Elevlösning 20.1 (2 A_R)

För större värden på x, kommer x-termen resp. $3x$-termen att dominera. $y = 3x$ ger brantare lutning än $y = x$, och vi ser att B o C har brantare lutning än A o D vid större x.

Dessa tillhör då f_2 o f_4. $3x$-termen kommer börja dominera vid lägre x för f_4 än för f_2, då $\frac{1}{3x}$ blir litet vid ett lägre x än $\frac{1}{x}$. Därför är B f_4 och C f_2.

Då kommer A o D tillhöra f_1 o f_3, och vi ser också att dessas grafer är mindre branta när x-termen dominerar. Samma resonemang om $\frac{1}{x}$-termen o $\frac{1}{3x}$-termen gäller för dessa funktioner, och vi får att A är f_1, och D är f_3.

Svar: A – f_1, B – f_4, C – f_2, D – f_3

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett resonemang som på ett entydigt sätt visar hur varje funktion hänger ihop med respektive graf. Även om lösningen innehåller någon del som inte är helt välformulerad, ”då $\frac{1}{3x}$ blir litet vid ett lägre x än $\frac{1}{x}$”, bedöms lösningen uppfylla kraven för båda resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösning 20.2 (2 A_R)

De som lutar starkast upp är de som har $y = \frac{1}{bx} + x \cdot 3$, alltså B och C.
Det ges då också att de andra är de med $y = \frac{1}{bx} + x$.
De som går långt ned är de som har ett litet värde av $\frac{1}{bx}$. Insättning av 0,5 ger att $\frac{1}{0{,}5} = 2$ $\frac{1}{3 \cdot 0{,}5} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} < 2$ ger att

$A = f_1$ $C = f_2$

$D = f_3$ $B = f_4$

Kommentar: Lösningen innehåller ett korrekt resonemang som identifierar varje funktions graf. Trots att lösningen innehåller något vaga formuleringar såsom ”lutar starkast upp” och ”som går långt ned” bedöms kraven för den andra resonemangspoängen på A-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

Uppgift 25.

Elevlösning 25.1 (1 C_P och 1 C_{PL})

$y = 1 \quad x = 0 \quad f''(x) = \cos x - \sin 2x$

$f'(x) = 2 \quad f' = \sin x + \frac{\cos 2x}{2} + C$

$f'(0) = 2 = \sin 0 + \frac{\cos 2 \cdot 0}{2} + C = \frac{1}{2} + C$

$\Rightarrow C = 1{,}5 \Rightarrow f'(x) = \sin x + \frac{\cos 2x}{2} + 1{,}5$

Kommentar: I elevlösningen bestäms $f'(x)$ korrekt vilket ger procedur- och problemlösningspoängen på C-nivå. När det gäller kommunikation skrivs felaktigt $f'(x) = 2$. På rad 3 används likhetstecken på ett ostrukturerat sätt och förklaring saknas till varför $f'(0) = 2$. Dessa brister gör att kraven för kommunikationspoängen på C-nivå inte anses vara uppfyllda.

Elevlösning 25.2 (1 C_P, C_{PL} och 1 C_K)

$f''(x) = \cos(x) - \sin(2x) \Rightarrow$

$f'(0) = 2 \quad f'(x) = \sin(x) + \frac{\cos(2x)}{2} + C \Rightarrow$

$f(0) = 1 \quad f(x) = -\cos(x) + \frac{\sin(2x)}{4} + Cx + D$

$f(0) = -1 + 0 + 0 + D = 1$

$\Rightarrow D = 2$

$f'(0) = 0 + \frac{1}{2} + C = 2$

$\Rightarrow C = 1{,}5$

$f'(x) = \sin(x) + \frac{\cos(2x)}{2} + 1{,}5$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en korrekt bestämning av $f'(x)$. När det gäller kommunikation saknas förklaring till varför $f'(0) = 2$ och en onödig bestämning av $f(x)$ görs på rad 3–5. Trots dessa brister anses kraven för kommunikationspoäng på C-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

Uppgift 26.

Elevlösning 26.1 (2 C_M och 1 A_M)

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \qquad r' = 3{,}5\ cm/s = 0{,}35\ dm/s$$

$$V' = \frac{4\pi 3r^2}{3} = 4\pi r^2$$

$$V' = 4\pi r^2 \cdot r'$$

$$= 4\pi \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}35 = 1{,}583\ dm^3/s$$

Konstant hastighet $\rightarrow$ $V' = \frac{V}{t}$ $\rightarrow$ $t = \frac{V}{V'}$

$$t = \frac{V}{V'} = \frac{5{,}5\ dm^3}{1{,}583\ dm^3/s} = \underline{\underline{3{,}47\ s}}$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en korrekt bestämning av den efterfrågade tiden. När det gäller kommunikation används beteckningen V' för såväl $\frac{dV}{dr}$ som $\frac{dV}{dt}$ vilket medför att lösningen inte är helt lätt att följa och förstå. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på C-nivå och en modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösning 26.2 (2 C_M, 1 A_M och 1 A_K)

$V = 5{,}5$ liter $\qquad \frac{dr}{dt} = 3{,}5\ cm/s = 0{,}35\ dm/s$

då $r = 0{,}6\ dm$

$V = 4\pi r^3/3$ $\qquad$ liter $= dm^3$

$$\frac{dV}{dr} = V' = \frac{3 \cdot 4\pi r^2}{3} = 4\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}35 = 1{,}58 \text{ liter/s}$$

Konstant hastighet: $V = \frac{dV}{dt} \cdot t$

$$t = \frac{5{,}5}{1{,}58} = \underline{3{,}47\ s}$$

Kommentar: Elevlösningen är korrekt. När det gäller kommunikation används symboler och beteckningar korrekt. Det saknas förklarande text vilket gör lösningen något otydlig men trots denna brist anses kraven för kommunikationspoäng på A-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda. Elevlösningen ges samtliga möjliga poäng.

Uppgift 28.

Elevlösning 28.1 (1 C_P)

$f(0) = -1 \qquad f(x) = x^2+3x-1 \longrightarrow f(0) = -1$

$f'(0) = 3 \qquad f'(x) = 2x+3 \longrightarrow f'(0) = 3$

$f''(0) = 2 \qquad f''(x) = 2 \longrightarrow f''(0) = 2$

$h(x) = (f(x))^2 = (x^2+3x-1)^2$

$h'(x) = (2\cdot(2x+3))(x^2+3x-1)$

$(4x+6)(x^2+3x-1) = 4x^3+12x^2-4x+6x^2+18x-6=$

$4x^3+18x^2+14x-6$

$h''(x) = 12x^2+36x+14$

$h''(0) = 14$

Svar: 14

Kommentar: Elevlösningen utgår från ett specialfall som uppfyller de givna villkoren och innehåller en godtagbar redovisning av hur $h''(0)$ beräknas för detta specialfall. Detta anses motsvara en godtagbar ansats. Lösningen uppfyller därmed kraven för procedurpoängen på C-nivå.

Elevlösning 28.2 (1 C_P och 2 A_P)

$f(0) = -1$

$f'(0) = 3$

$f''(0) = 2$

$h(x) = (f(x))^2$

$h'(x) = f$

$h(x) = f(x) \cdot f(x)$

$h'(x) = f'(x) \cdot f'(x)$

$h'(x) = f'(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f(x)$

$= 3 \cdot -1 + 3 \cdot (-1)$

$= -3 - 3 = -6$ (om det slutat)

$h'(x) = f'(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f(x) \quad = 2f'(x) \cdot f(x)$

$h''(x) = f'(x) \cdot f'(x) + f''(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f'(x) + f''(x) \cdot f(x)$

$h''(0) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)$

$= 9 + (-2) + 9 + (-2) = 14$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en godtagbar bestämning av $h''(0)$ för en generell funktion vilket uppfyller kraven för de tre procedurpoängen. När det gäller kommunikation innehåller lösningen ovidkommande och felaktig information på femte och sjunde raden som sedan inte används. Efter bestämningen av $h'(x)$ övergår detta till en ovidkommande bestämning av $h'(0)$ utan att beteckningen ändras. Dessa brister gör att lösningen inte blir helt lätt att följa och förstå och att kraven för kommunikationspoäng på A-nivå ej anses vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på C-nivå och två procedurpoäng på A-nivå.

Elevlösning 28.3 (1 C_P, 2 A_P och 1 A_K)

$h(x) = (f(x))^2$

$f(0) = -1$

$f'(0) = 3$

$f''(0) = 2$

$h'(x) = 2(f(x)) \cdot f'(x)$

$h''(x) = 2 \cdot (f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x))$

$h''(0) = 2 \cdot (3 \cdot 3 + (-1 \cdot 2))$

$h''(0) = 2 \cdot 7$

$h''(0) = 14$

Kommentar: Elevlösningen utgår från en generell funktion och $h''(0)$ bestäms korrekt. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå och det matematiska språket är korrekt. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng inklusive kommunikationspoängen på A-nivå.