

Delprov B	Uppgift 1–9. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 10–19. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för delprov B och delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Gräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå

B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs.* Skriv dina svar direkt i elevhäftet.

1. Hur många grader motsvarar vinkeln $\frac{\pi}{8}$? _____ (1/0/0)

2. Derivera

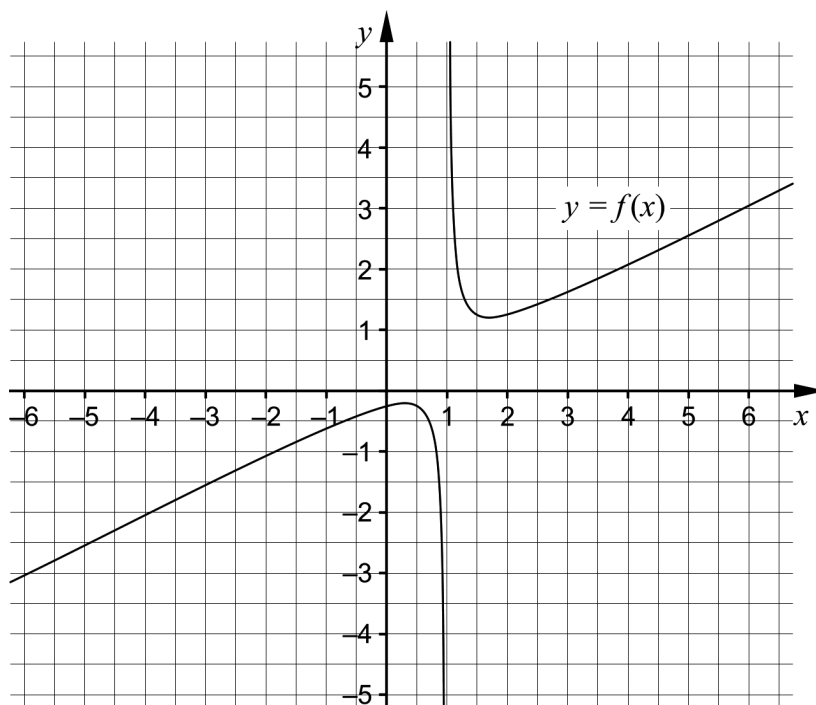
a) $f(x) = \cos 3x$ _____ (1/0/0)

b) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ _____ (1/0/0)

c) $f(x) = (2e^x + 3)^5$ _____ (0/1/0)

3. Beräkna $i^5 + 3i$ _____ (1/0/0)

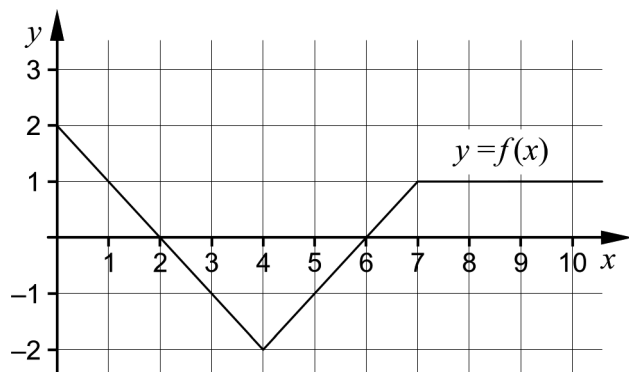
4. Figuren visar grafen till en funktion f .



Funktionen har två asymptoter.
Bestäm ekvationerna för asymptoterna.

_____ (1/1/0)

5. Grafen till funktionen f är ritad i ett koordinatsystem.

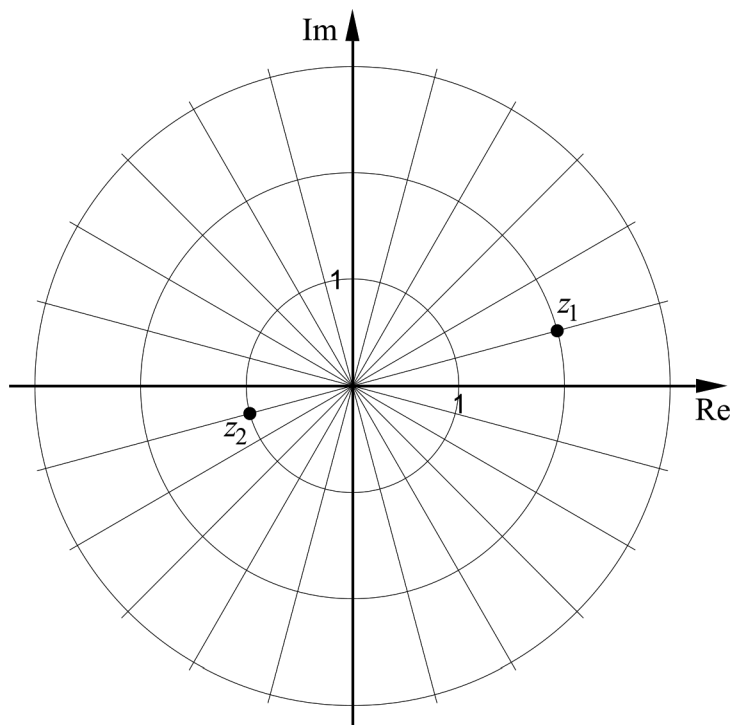


För vilka värden på a i intervallet $0 < a < 10$ gäller att

$$\int_0^a f(x) dx = 0 ?$$

_____ (1/1/0)

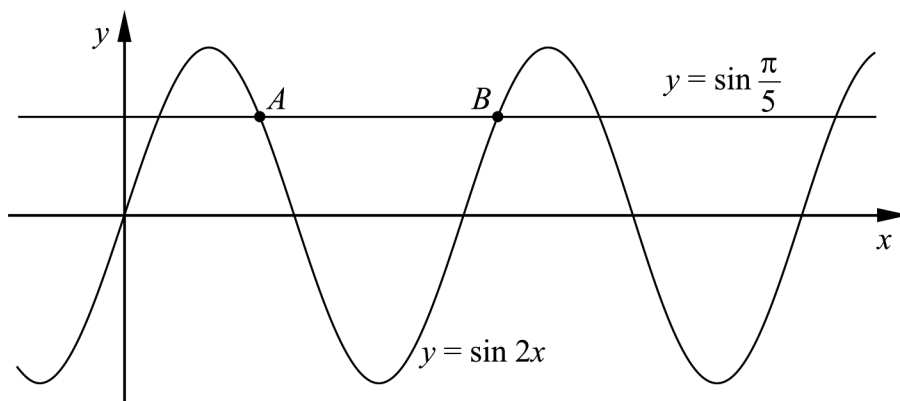
6. Figuren visar ett komplext talplan med cirklar och linjer. Cirklarna har centrum i origo och radierna 1, 2 och 3. Linjerna går genom origo och bildar vinklarna $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, \dots$ med positiva reella axeln. Två komplexa tal z_1 och z_2 är markerade.



Markera $z_1 \cdot z_2$ i figuren.

(0/1/0)

7. Figuren visar kurvan $y = \sin 2x$ och linjen $y = \sin \frac{\pi}{5}$.
Två skärningspunkter, A och B , är markerade.

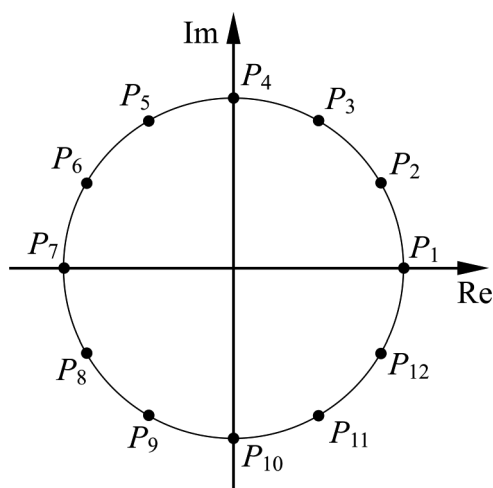


Bestäm x -koordinaterna för punkterna A och B .

$x_A =$ _____

$x_B =$ _____ (0/2/0)

8. I ett komplext talplan är punkterna $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{12}$ markerade på cirkeln $|z| = 3$



Bland dessa punkter finns rötterna till ekvationen $z^3 = -27i$.

Ange de punkter som representerar rötterna till

ekvationen $z^3 = -27i$.

_____ (0/0/1)

9. Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \sin 2x \cdot \cos^5 2x$

_____ (0/0/2)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

10. Lös ekvationen $(3z + 2)(z^2 + 6z + 10) = 0$ (2/0/0)

11. Beräkna $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ (2/0/0)

12. För funktionen $f(x) = a + b \ln x$, där a och b är konstanter, gäller att $f'(2) = 1$ och $f(e) = -1$

Bestäm konstanterna a och b . (2/0/0)

13. Julia, Vanessa och Fridolin studerar funktionen $f(x) = |x - 2|$

a) Rita grafen till $f(x) = |x - 2|$ (1/0/0)

Julia säger att derivatan är 1

Vanessa säger att derivatan är -1

Fridolin säger att funktionen saknar derivata.

Alla tre har delvis rätt.

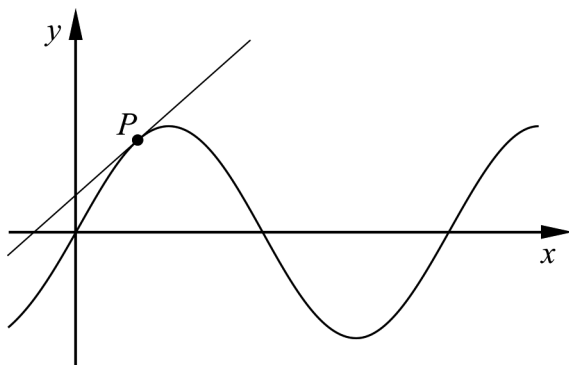
b) Ge en korrekt beskrivning av $f'(x)$. *Endast svar krävs* (1/1/0)

14. Visa att $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$ (0/2/0)

15. Lös ekvationen $2 \cos^2 x + \sin x = 2$ (0/3/0)

16. Bestäm de heltal $n > 0$ som gör att uttrycket $(\sqrt{3} + i)^n$ blir reellt. (0/1/1)

17. Kurvan $y = \sin x$ tangeras i punkten P av $y = \frac{x}{2} + \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$, $x \geq 0$
Se figur.



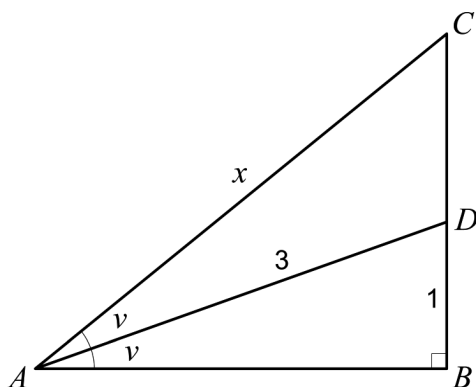
Bestäm koordinaterna för punkten P . Svara exakt.

(0/0/2)

18. Beräkna $\int_2^3 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1} dx$.

(0/0/3)

19. I den rätvinkliga triangeln ABC dras en sträcka AD som delar vinkeln vid A i två lika stora vinklar v . Längden av sträckorna BD och AD är 1 respektive 3 längdenheter. Se figur.



Visa att $x = \frac{9\sqrt{8}}{7}$

(0/0/2)

Delprov D	Uppgift 20–28. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Gräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå

B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

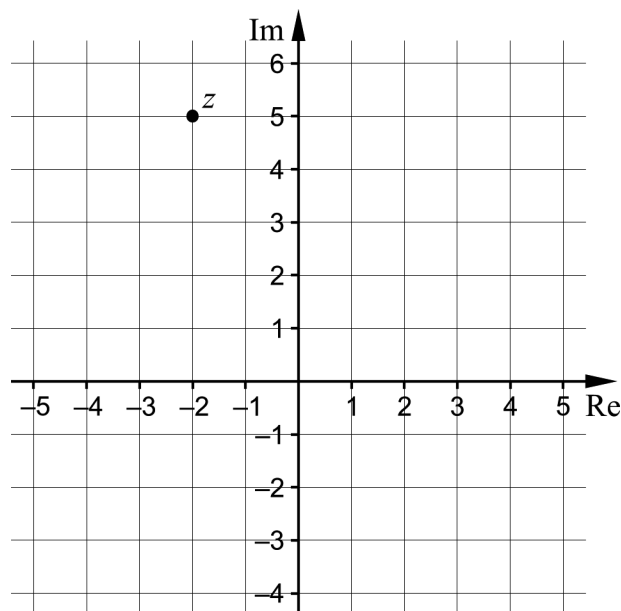
Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

20. Det komplexa talet z är markerat i det komplexa talplanet.



Bestäm z på polär form.

(2/0/0)

21. Bestäm konstanten a så att $y = a \cdot e^{2x}$ blir en lösning till differentialekvationen $y' + y = e^{2x}$.

(2/0/0)

22. Tidvatten är ett fenomen som uppstår på grund av månens dragningskraft på havsvattnet. Under ett dygn uppstår det både ebb (lågvattnet) och flod (högvatten). De största skillnaderna mellan ebb och flod på jorden finns vid Burntcoat Head på Kanadas ostkust.

Enligt en enkel modell kan vattennivån under ett visst dygn vid Burntcoat Head beskrivas med funktionen

$$y = 8,0 + 8,0 \cos 0,51x$$

där y är vattnets höjd i meter jämfört med lägsta vattennivån och x är antalet timmar efter klockan 03.00

- a) Bestäm höjdskillnaden mellan högsta och lägsta vattennivån enligt modellen ovan.

Endast svar krävs

(1/0/0)

- b) Utgå från modellen ovan och bestäm med vilken hastighet vattnets höjd ändras då klockan är 13.00

(1/1/0)

23. Ett område begränsas av y -axeln, kurvan $y = 1 - e^{-x}$ och linjen $y = 1 - x$.

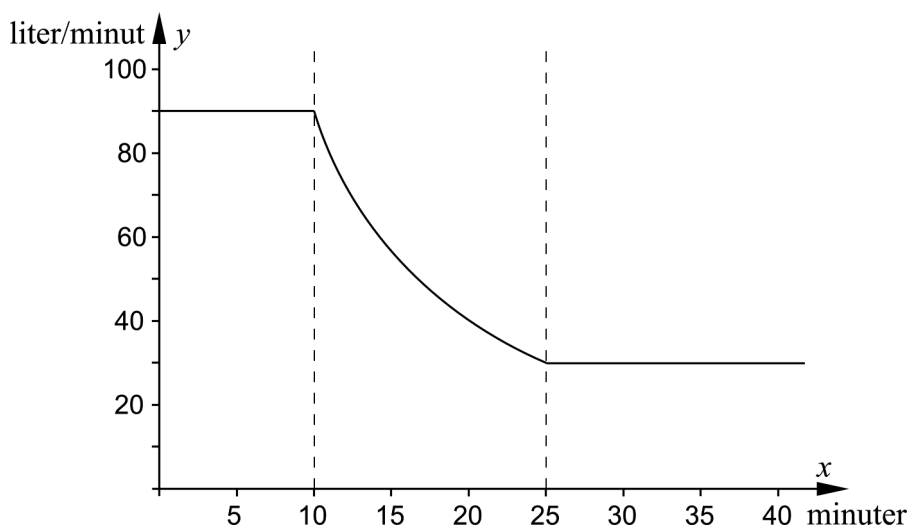
a) Teckna ett uttryck för områdets area. (0/1/0)

b) Beräkna områdets area. Svara med minst två decimaler. (0/1/0)

24. En tom tank ska fyllas med vatten. Under de första 10 minuterna är påfyllningshastigheten konstant, 90 liter/minut. Under de följande 15 minuterna sjunker påfyllningshastigheten på grund av minskat vattentryck. Därefter är påfyllningshastigheten konstant 30 liter/minut.

Grafen visar hur påfyllningshastigheten y liter/minut beror av tiden x minuter. Under den tid då vattentrycket sjunker ges

påfyllningshastigheten av funktionen $y = \frac{1000}{x} - 10$



Bestäm hur lång tid det tar att fylla tanken med 2000 liter vatten.

(0/3/0)

25. En ring av svampar i gräsmattan kallas för en häxring. Enligt gammal folktro var det häxor som dansade så att en ring uppstod. Egentligen bildas häxringar från en enstaka svampkoloni.



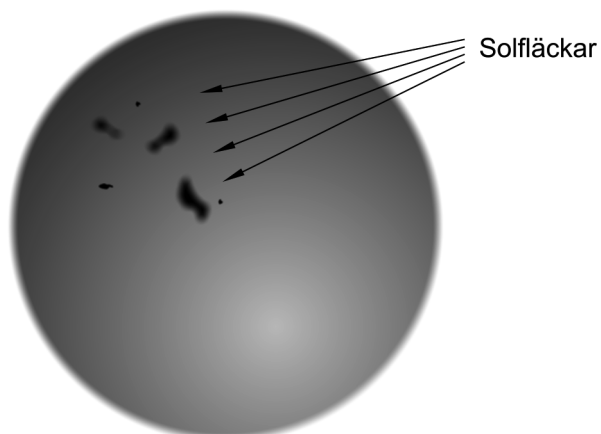
Häxringars area ökar med tiden.

I en viss cirkelformad häxring ökar radien med 20 cm/år.
Bestäm hur snabbt häxringens area ökar när radien är 75 cm.

(0/3/0)

Provet fortsätter på nästa sida.

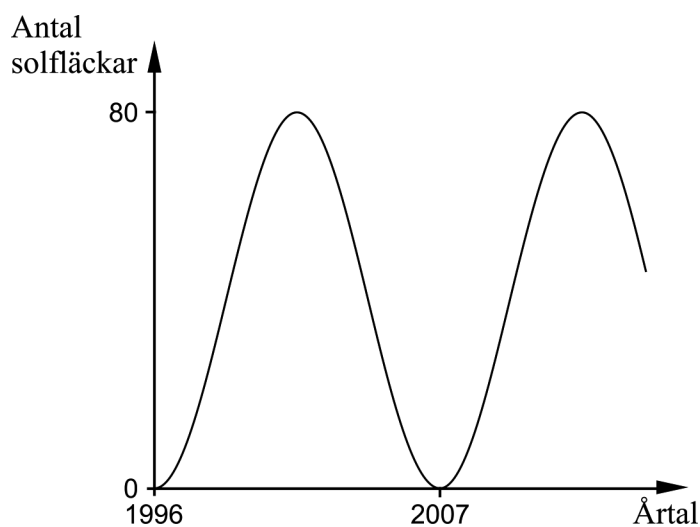
26. På solens yta kan det bildas mörka områden där ytan är mindre het och därför lyser svagare. Dessa områden kallas solfläckar. Antalet solfläckar som syns från jorden varierar periodiskt mellan 0 och 80.



Fläckarnas antal $f(t)$ kan enligt en enkel modell beskrivas med funktionen

$$f(t) = A \cdot \sin(Bt + C) + D$$

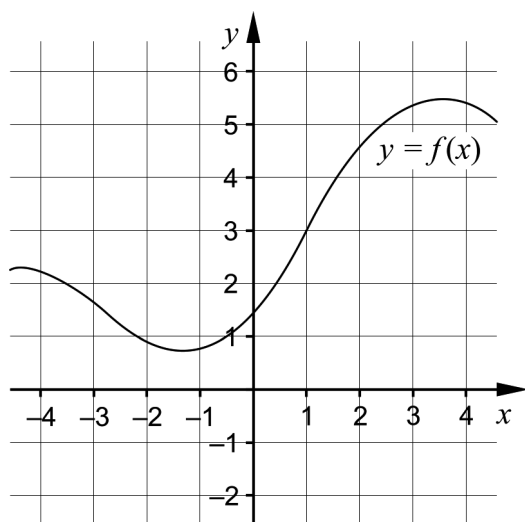
där A , B , C och D är konstanter och t är tiden i år räknat från år 1996. År 1996 var antalet solfläckar noll. Figuren visar hur antalet solfläckar varierar enligt modellen.



Bestäm konstanterna A , B , C och D .

(1/1/1)

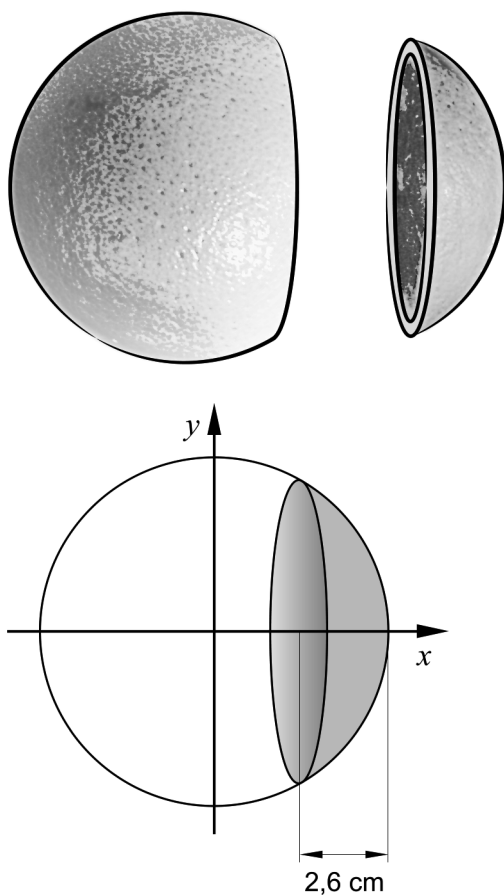
27. Figuren visar grafen till funktionen f .



En ny funktion g definieras av $g(x) = (f(x))^2$.
Bestäm $g'(1)$.

(0/0/2)

28. En apelsin har formen av ett klot med radien 5,0 cm. Apelsinen delas genom att en del med tjockleken 2,6 cm skärs av, se figur.



Bestäm volymen av den lilla delen.

(0/0/3)

Innehållsförteckning

Inledning.....	4
Läsanvisning.....	4
1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4.....	5
Uppgifter av kortsvarstyp	5
Uppgifter av långsvarstyp	5
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga	6
Sammanställning av elevresultat	7
Sammanställning till ett provbetyg	7
2. Bedömningsanvisningar	8
Läsanvisning.....	8
Instruktioner för bedömning av delprov B.....	8
Instruktioner för bedömning av delprov C.....	9
Instruktioner för bedömning av delprov D	11
3. Exempel på bedömda elevlösningar.....	14
Uppgift 13a	14
Uppgift 14	14
Uppgift 18	15
Uppgift 22b	16
Uppgift 24	16
Uppgift 25	18
Uppgift 28	20
4. Instruktioner för sammanställning till ett provbetyg.....	22
Sammanställningen till ett provbetyg i samband med provet i matematik 4	22
Resultaten på provet i relation till kursbetyget	22
5. Instruktioner för inrapportering av provresultat.....	23
Skolans rapportering av provresultat.....	23
6. Kopieringsunderlag och webbmaterial.....	25
Webbmaterial.....	25
Formulär för sammanställning av elevresultat.....	26
Provsammanställning – centralt innehåll	27
Centralt innehåll matematik 4 – förkortningar.....	28

Inledning

På uppdrag av regeringen ansvarar Skolverket för samtliga nationella prov. Syftet med de nationella proven är i huvudsak att

- stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning
- ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapskraven uppfylls på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå.

De nationella proven kan också bidra till

- att konkretisera kurs- och ämnesplanerna
- en ökad måluppfyllelse för eleverna.

Det är rektorn som ansvarar för organisationen omkring provet på skolan och för att leda och fördela arbetet.

Läsanvisning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 4. Häftet består av 6 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma elevernas prestationer på de olika delproven (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanställningen till ett provbetyg (kapitel 4) samt ett kapitel med instruktioner för inrapportering av provresultat (kapitel 5). Det avslutande kapitlet innehåller kopieringsunderlag samt hänvisningar till webbmaterial (kapitel 6).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som provas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den huvudsakliga som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en "problemlösningspoäng på E-nivå" respektive en "resonemangspoäng på A-nivå".

Uppgifter av kortsvarstyp

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

Uppgifter av långsvarstyp

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknfel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. (Eventuella avvikelser från dessa modeller kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.)

Modell 1

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E_p
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 E_p

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen kan falla ut först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet "med" inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E _p
med korrekt bestämning av...	+1 E _p
Godtagbar verifiering av...	+1 E _p

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ... 1 E _R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ... 1 E _R och 1 C _R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ... 1 E _R , 1 C _R och 1 A _R

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

I samband med vissa uppgifter ska elevens skriftliga kommunikativa förmåga bedömas. Då gäller följande krav:

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \approx, \pm, \sqrt{}, f(x), f'(x), f''(x), x, y, (), [], \int, dx$, gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v, \sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, färförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differentialekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

Sammanställning av elevresultat

När eleven har genomfört de olika delproven noteras resultaten i "Formulär för sammanställning av elevresultat" som finns i kapitel 6. Syftet med formuläret är att underlätta för läraren att sammanställa och rapportera in elevens resultat. Det kan också användas vid samtal med eleven om provresultatet.

Sammanställning till ett provbetyg

När samtliga delprov är genomförda ska resultaten summeras till ett provbetyg. Information om hur summeringen går till finns i kapitel 4.

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

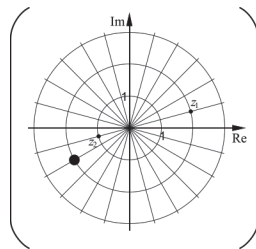
Instruktioner för bedömning av delprov B

- | | |
|--|-------------------|
| 1. | Max 1/0/0 |
| Godtagbart svar (22,5) | +1 E _B |
| 2. | Max 2/1/0 |
| a) Korrekt svar ($f'(x) = -3 \sin 3x$) | +1 E _P |
| b) Korrekt svar ($f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$) | +1 E _P |
| c) Korrekt svar ($f'(x) = 10e^x (2e^x + 3)^4$) | +1 C _P |
| <i>Kommentar:</i> Även svaret $f'(x) = 2e^x \cdot 5(2e^x + 3)^4$ godtas. | |
| 3. | Max 1/0/0 |
| Korrekt svar (4i) | +1 E _P |
| 4. | Max 1/1/0 |
| Anger minst en godtagbar asymptotekvation | +1 E _B |
| med godtagbart svar ($x = 1$ och $y = 0,5x$) | +1 C _B |
| 5. | Max 1/1/0 |
| Anger minst ett godtagbart värde på a | +1 E _B |
| med godtagbart svar ($a = 4$ och $a = 8,5$) | +1 C _B |

6.

Max 0/1/0

Godtagbart markerad punkt

+1 C_B

7.

Max 0/2/0

Anger minst en korrekt x -koordinat+1 C_{PL}med korrekt svar ($x_A = \frac{2\pi}{5}$ och $x_B = \frac{11\pi}{10}$)+1 C_{PL}

8.

Max 0/0/1

Korrekt svar (P_4 , P_8 och P_{12})+1 A_B

9.

Max 0/0/2

Svar på formen $F(x) = k \cos^6 2x + C$ där k och C är konstanter, t ex $F(x) = \cos^6 2x$ +1 A_Bmed korrekt svar (t ex $F(x) = -\frac{1}{12} \cos^6 2x$)+1 A_P

Instruktioner för bedömning av delprov C

10.

Max 2/0/0

Godtagbar ansats, bestämmer minst två av ekvationens rötter korrekt

+1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar

 $(z_1 = -\frac{2}{3}, z_2 = -3 + i \text{ och } z_3 = -3 - i)$ +1 E_P

11.

Max 2/0/0

Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion, $\ln|x|$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1)

+1 E_B*Kommentar:* Även $\ln x$ godkänns som primitiv funktion.

- 12.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer en av konstanterna korrekt +1 E_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a = -3$ och $b = 2$) +1 E_{PL}
- 13.** **Max 2/1/0**
- a) Godtagbart ritad graf där omgivningen till $x = 2$ finns med +1 E_B
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
- b) Godtagbar beskrivning av $f'(x)$ i två av de tre fallen $x < 2$, $x = 2$, $x > 2$ +1 E_R
 med godtagbart svar ($f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ \text{saknas}, & x = 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$) +1 C_R
- 14.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, skriver om både täljare och nämnare med formlerna för dubbla vinkeln +1 C_R
 med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 C_R
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
- 15.** **Max 0/3/0**
- Godtagbar ansats, t ex använder trigonometriska ettan och kommer fram till en ekvation uttryckt i enbart $\sin x$ +1 C_P
 med godtagbar fortsättning, bestämmer någon lösning till vardera ekvationen $\sin x = 0$ och $1 - 2 \sin x = 0$ eller löser en av ekvationerna fullständigt +1 C_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar +1 C_P
 ($x = n \cdot 180^\circ$, $x = 30^\circ + n \cdot 360^\circ$ och $x = 150^\circ + n \cdot 360^\circ$)
- 16.** **Max 0/1/1**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer $\arg(\sqrt{3} + i)$ korrekt, 30° +1 C_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (t ex $n = 6, 12, 18, \dots$) +1 A_{PL}

17.

Max 0/0/2

Godtagbar ansats, t ex visar insikt om att $y' = \cos x$ är lika med tangentens

lutning och kommer fram till ekvationen $\cos x = \frac{1}{2}$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ +1 A_{PL}

18.

Max 0/0/3

Godtagbar ansats, t ex påbörjar polynomdivision +1 A_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0,5) +1 A_P

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 "Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga" +1 A_K

Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"



19.

Max 0/0/2

Godtagbar ansats, t ex bestämmer värdet av $\cos 2v$, $\frac{7}{9}$ +1 A_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 A_R

Instruktioner för bedömning av delprov D

20.

Max 2/0/0

Godtagbar ansats, t ex bestämmer $|z|$, 5,39 +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar $(5,39(\cos 112^\circ + i \sin 112^\circ))$ +1 E_P

21.

Max 2/0/0

Godtagbar ansats, t ex sätter in $y = a \cdot e^{2x}$ och $y' = 2a \cdot e^{2x}$ i differential-
ekvationen +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $(a = \frac{1}{3})$ +1 E_{PL}

22.

Max 2/1/0

- a) Korrekt svar (16 m) +1 E_M
- b) Godtagbar ansats, visar insikt om att det sökta värdet motsvaras av $y'(10)$ +1 E_M
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,8 m/h) +1 C_M

Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"



23.

Max 0/2/0

- a) Godtagbar lösning med godtagbart svar ($\int_0^{0,567} (1-x-(1-e^{-x})) dx$) +1 C_B
- b) Godtagbar lösning med godtagbart svar (0,27 a.e.) +1 C_P

Kommentar: Även svar utan enhet eller med felaktig enhet godtas.

24.

Max 0/3/0

- Godtagbar ansats, t ex bestämmer volymen efter de första 25 minuterna, 1666 liter +1 C_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (36 minuter) +1 C_M
- Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 "Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga" +1 C_K

Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"



25.

Max 0/3/0

- Godtagbar ansats, t ex ställer upp $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$ och
- inser att $\frac{dr}{dt} = 20$ eller att $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$ +1 C_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,94 m²/år) +1 C_M
- Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 "Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga" +1 C_K

Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"



26.

Max 1/1/1

Godtagbar ansats, bestämmer minst två av konstanterna

+1 E_M

med godtagbar fortsättning, bestämmer minst tre av konstanterna

+1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar

(t ex $A = 40$, $B = \frac{2\pi}{11}$, $C = -\frac{\pi}{2}$, $D = 40$)

+1 A_M

Kommentar: Avrundade svar och/eller svar i grader anses godtagbara.

27.

Max 0/0/2

Godtagbar ansats, bestämmer $g'(x)$ korrekt, $g'(x) = 2f(x)f'(x)$

+1 A_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar i intervallet
 $9 \leq g'(1) \leq 14$

+1 A_{PL}

28.

Max 0/0/3

Godtagbar ansats, använder cirkelns ekvation och ställer upp ett korrekt
integraluttryck för volymen,

$$\text{t ex } \int_{2,4}^5 \pi(5^2 - x^2) dx$$

+1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (88 cm^3)

+1 A_M

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 "Bedömning av skriftlig
kommunikativ förmåga"

+1 A_K

Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"

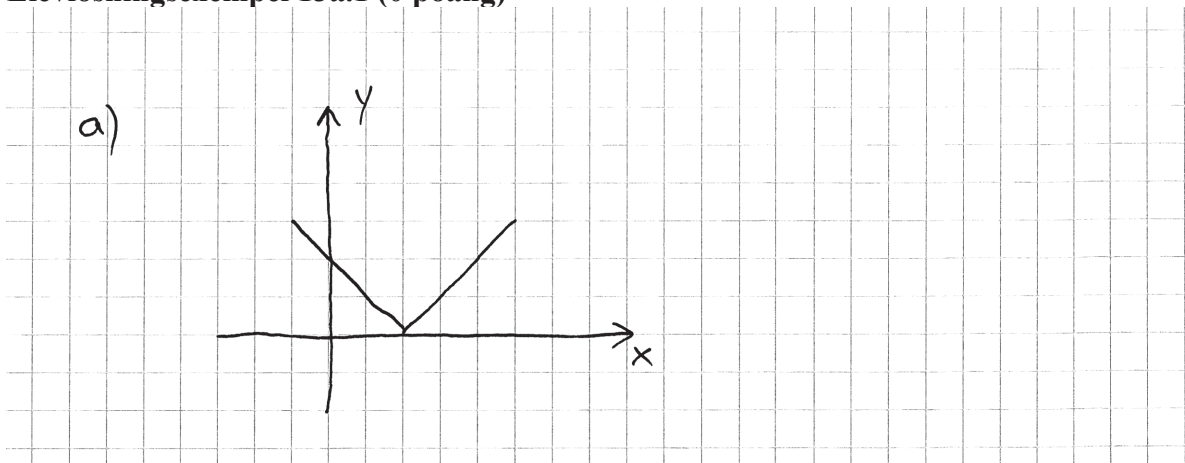


3. Exempel på bedömda elevlösningar

I det här kapitlet finns exempel på bedömda elevlösningar till vissa uppgifter i provet samt kommentarer till exemplen som stöd för bedömningen.

Uppgift 13a

Elevlösningsexempel 13a.1 (0 poäng)



Bedömningskommentar till exemplet: Grafen ritas utan skala på koordinataxlarna vilket inte anses vara en godtagbart ritad graf. Lösningen ges noll poäng.

Uppgift 14

Elevlösningsexempel 14.1 (1 C_R)

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$$

$$\frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos 2x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2 \cos x = \frac{1 + \cos 2x}{\cos x}$$

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$2 \cos^2 x = 1 + (2 \cos^2 x - 1)$$

$$2 \cos^2 x = 2 \cos^2 x$$

V. S. V.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen bygger på likheten som ska visas. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kravet för den andra resonemangspoängen på C-nivå.

Uppgift 18

Elevlösningsexempel 18.1 (2 Ap)

$$\int_2^3 \left(\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1} \right) dx$$

Utför division:

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^3-2x^2-x+2 \quad | \quad x^2-1 \\ -(x^3-x) \\ \hline -2x^2+2 \\ -(-2x^2+2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = x-2 \quad F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

$$\begin{aligned} \int_2^3 (x-2) dx &= \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 = \left(\frac{3^2}{2} - 2 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) = \\ &= \frac{9}{2} - 6 - \frac{4}{2} + 4 = \\ &= \frac{17}{2} - \frac{16}{2} = \left(\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms ett korrekt värde på integralen. När det gäller kommunikation är lösningen inte helt lätt att följa, den omskrivna integranden kommenteras inte och $f(x)$ införs utan definition. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda.

Uppgift 22b

Elevlösningsexempel 22b.1 (1 E_M)

$$y' = -8 \cdot 0,51 \sin 0,51x = -4,08 \sin 0,51x$$

$$y'(10) = -4,08 \sin(0,51 \cdot 10) \approx 3,8$$

Svar: Hastigheten är 3,8

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en korrekt beräkning av $y'(10)$. Eftersom enhet saknas anses svaret inte vara godtagbart. Sammantaget ges lösningen en modelleringspoäng på E-nivå.

Uppgift 24

Elevlösningsexempel 24.1 (2 C_M)

$$90 \cdot 10 = 900 \quad \text{efter 10 min}$$

$$\int_{10}^{25} \frac{1000}{x} - 10 = \left[1000 \cdot \ln x - 10x \right]_{10}^{25}$$

$$1000 \cdot \ln 25 - 250 = 2968,9 \dots$$

$$1000 \cdot \ln 10 - 100 = 2202,6 \dots$$

$$2968,9 - 2202,6 = 766,3$$

$$\sim 766 + 900 = 1666$$

$$2000 - 1666 = 334$$

$$\frac{334}{30} = 11,1 \dots$$

Svar: $\sim 36,1$ minuter

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med godtagbart svar. När det gäller kommunikation anses lösningen vara svår att följa då det saknas såväl enheter i delberäkningarna som förklaringar till vad som beräknas. I integralen saknas dx och parentes runt integranden. Dessa brister gör att lösningen inte anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 24.2 (2 C_M och 1 C_K)

$$90 \cdot 10 = 900 \text{ l} \quad (10 \text{ min})$$

$$\int_{10}^{25} \frac{1000}{x} - 10 = 766 \text{ l} \quad (25 - 10 = 15 \text{ min})$$

$$2000 - 900 - 766 = 334 \text{ l}$$

$$\frac{334 \text{ l}}{30 \text{ l/min}} = 11,12 \text{ min}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{liter/min} \cdot \text{min} = \text{liter} \\ y \cdot x = \text{liter} \end{array} \right)$$

$$10 \text{ min} + 15 \text{ min} + 11,12 \approx 36 \text{ min}$$

Svar: Det tar 36 minuter innan tanken innehåller 2000 liter vatten.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av den efterfrågade tiden vilket gör att kraven för de båda modelleringspoängen är uppfyllda. När det gäller kommunikation saknas parentes och dx i integralen. Hur integralen beräknats kommenteras inte och en del förklarande text saknas. Bristen på förklaringar kompenseras av tidsangivelserna, enhetsanalysen i de tre parenteserna samt enheterna i kvoten. Därmed anses kraven för kommunikationspoäng på C-nivå nått och jämnt vara uppfyllda.

Uppgift 25

Elevlösningsexempel 25.1 (1 C_M och 1 C_K)

$$\text{Area} = A \text{ m}^2 \quad \text{Radien ökar } 20 \text{ cm/år}$$

$$\text{radien} = 0,75 \text{ m}$$

$$\text{Tid} = t \text{ år}$$

$$\frac{dr}{dt} = 0,2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\text{Cirkelns area, } A = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot 0,2$$

$$\frac{dA}{dt} = 0,3\pi$$

Svar: Arean ökar med hastigheten
 $0,3\pi$ /år när radien är 0,75.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms den efterfrågade förändringshastigheten med felaktig enhet. Därmed uppfylls inte kravet för den andra modelleringspoängen. När det gäller kommunikation är lösningen möjlig att följa och förstå. Dessutom används variabler och beteckningar korrekt. Därmed anses kraven för kommunikationspoäng på C-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 25.2 (2 C_M och 1 C_K)

$$\frac{dr}{dt} = 20 \text{ cm/år} = 0,2 \text{ m/år}$$

$$\text{area cirkel, } A = \pi r^2$$

$$A' = 2\pi r$$

$$\text{sökt: } \frac{dA}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$r = 75 \text{ cm} = 0,75 \text{ m}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot 0,2 = 2\pi \cdot 0,75 \cdot 0,2 = 0,942\dots$$

$$\approx \underline{\underline{0,94 \text{ m}^2/\text{år}}}$$

Svar: Håxringen ökar med $0,94 \text{ m}^2/\text{år}$
när radien är $0,75 \text{ m}$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms den efterfrågade förändringshastigheten. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå. Visserligen används den tvetydiga beteckningen A' i stället för $\frac{dA}{dr}$ på tredje raden men $\frac{dA}{dr}$ används senare i lösningen. Trots den tvetydiga beteckningen anses lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 28

Elevlösningsexempel 28.1 (2 A_M)

$$r = 5,0 \text{ cm}$$

$$h = 2,6 \text{ cm}$$

$$r^2 = y^2 + x^2$$

$$5^2 = y^2 + x^2$$

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$\text{radien} = y$$

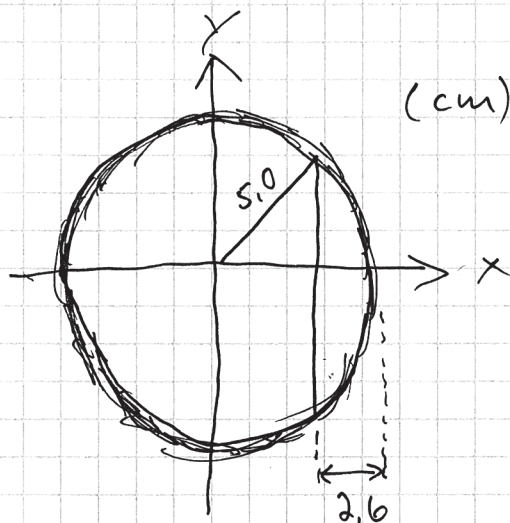
$$\text{Area} = \pi y^2 = \pi \sqrt{25 - x^2}^2 = \pi (25 - x^2) \quad 5 - 2,6 = 2,4$$

$$V = \int_{2,4}^5 \pi (25 - x^2) dx = \left[\pi \left(25x - \frac{x^3}{3} \right) \right]_{2,4}^5 =$$

$$= \pi \left(25 \cdot 5 - \frac{5^3}{3} \right) - \pi \left(25 \cdot 2,4 - \frac{2,4^3}{3} \right) \approx 87,8 \text{ cm}^3$$

$$\text{Svar: } 87,8 \text{ cm}^3$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en korrekt beräkning av volymen. När det gäller kommunikation saknas förklaringar till uppställda samband. Begreppen radie och area på rad fem och sex syftar på cirkelskivor, vilket inte framgår. Bestämning av nedre integrationsgränsen framgår inte tydligt. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 28.2 (2 A_M och 1 A_K)

Cirkelns ekvation

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$V = \pi \int_{5-2,6}^5 \sqrt{25-x^2}^2 dx \approx 88$$

Svar: 88 cm³

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av volymen. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå tack vare en tydlig figur. Hur integralen beräknas kommenteras inte och y förutsätts vara positivt utan kommentar. Trots dessa brister anses lösningen uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.