

Part B	Problems 1–10 which only require answers.
Part C	Problems 11–19 which require complete solutions.
Test time	150 minutes for part B and part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

The test consists of three written parts (part B, part C and part D). Together they give a total of 61 points consisting of 20 E-, 23 C- and 18 A-points.

- Level requirements for test grades
- E: 14 points
- D: 23 points of which 8 points on at least C-level
- C: 31 points of which 14 points on at least C-level
- B: 41 points of which 6 points on A-level
- A: 49 points of which 10 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled “*Only answer is required*” you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

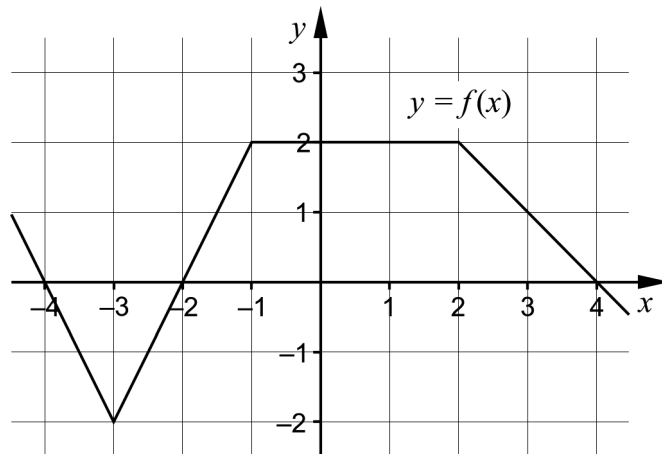
Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: _____
Date of birth: _____
Educational programme: _____

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required.* Write your answers in the test booklet.

1. A function is given by $f(x) = 1 + 2 \sin 3x$.
- a) Write down the period of the function. _____ (1/0/0)
- b) Write down the least value of the function. _____ (1/0/0)

2. The figure shows the graph of a function f .



Determine $\int_{-3}^0 f(x) dx$. _____ (1/0/0)

3. The complex number $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ is given in polar form.

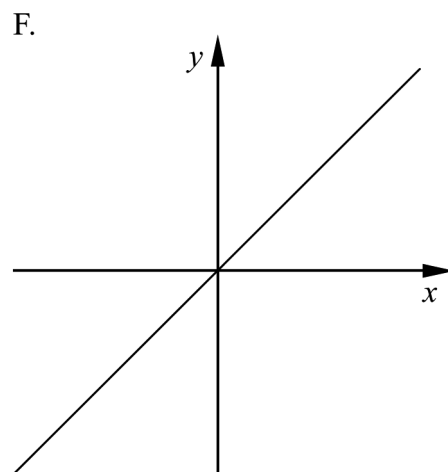
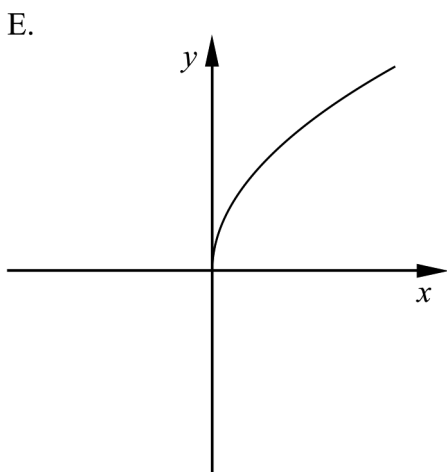
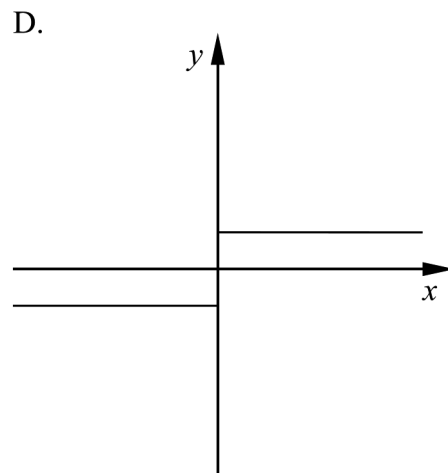
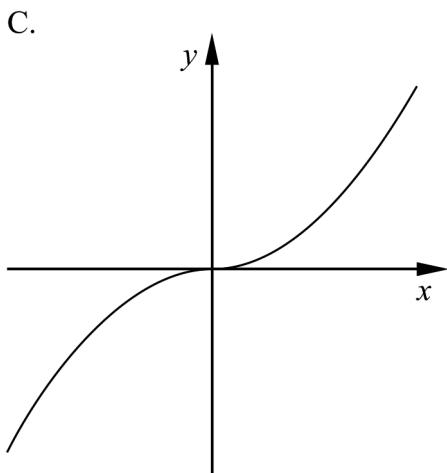
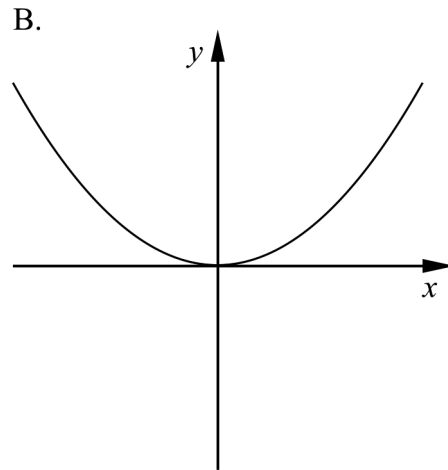
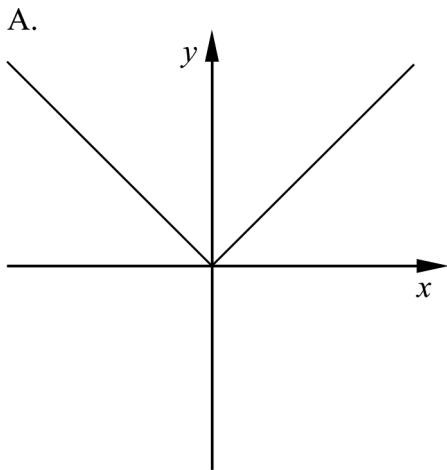
Determine $\arg(z^5)$. _____ (1/0/0)

4. Determine the exact value of

a) $\cos 390^\circ$ _____ (1/0/0)

b) $\sin 210^\circ$ _____ (1/0/0)

5. The alternatives A–F show six different curves.



One of the alternatives A–F shows the curve $y = x \cdot |x|$

Which one?

_____ (0/1/0)

6. The alternatives A–E describe five different curves.

A. $y = \frac{1}{x}$

B. $y = \frac{1}{x-1}$

C. $y = \frac{x}{x-1}$

D. $y = \frac{x+1}{x}$

E. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

One of the alternatives A–E describes a curve which has only two asymptotes, $x=1$ and $y=1$

Which one? _____ (0/1/0)

7. For every real value of the constant a the equation $z-3 = a(1-i)$ has one root.

For what values of a does the root lie in the first quadrant of the complex plane?

_____ (0/0/1)

8. Determine a primitive function of the function $f(x) = \sin 5x \cos 5x$.

_____ (0/0/1)

9. Four new functions are formed from the functions $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = \cos(x)$:

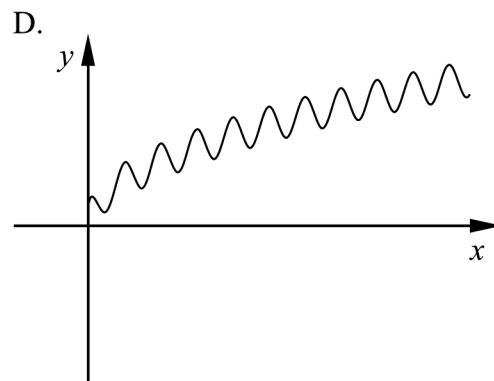
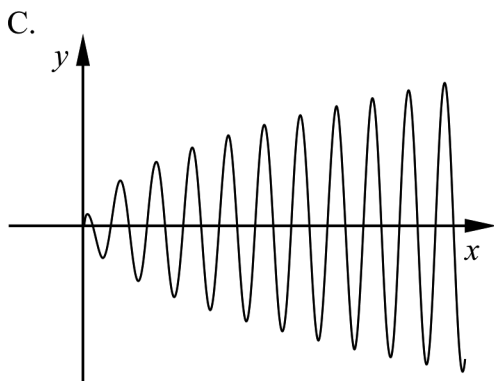
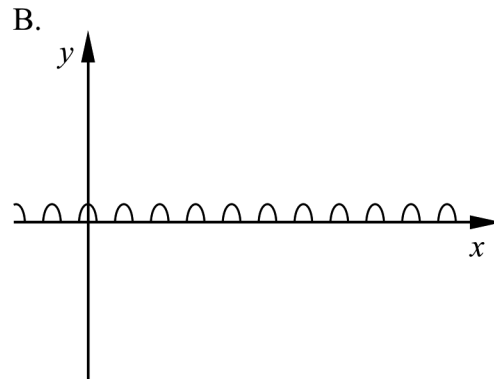
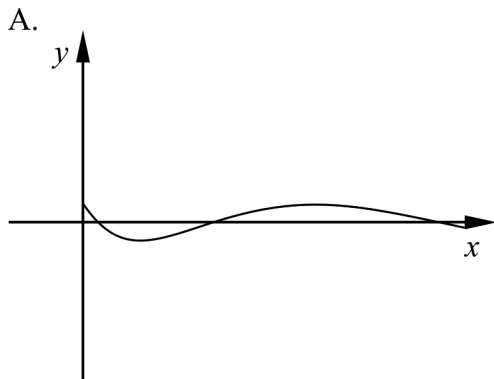
$$f(x) + g(x)$$

$$f(x) \cdot g(x)$$

$$f(g(x))$$

$$g(f(x))$$

Below, the graphs of these four new functions are shown, all drawn to the same scale.



State which graph A–D corresponds to which function.

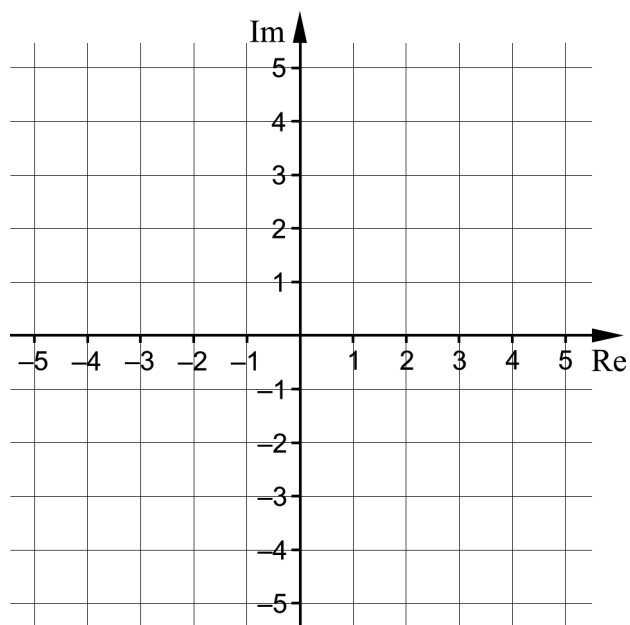
$f(x) + g(x)$ _____

$f(x) \cdot g(x)$ _____

$f(g(x))$ _____

$g(f(x))$ _____ (0/1/1)

10. In the complex plane, mark all the z that satisfy the condition $|z + \bar{z}| = |z - \bar{z}|$.



(0/0/2)

Part C: Digital resources are not allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

11. Solve the equation $\sin 2x = \frac{1}{2}$ (2/1/0)

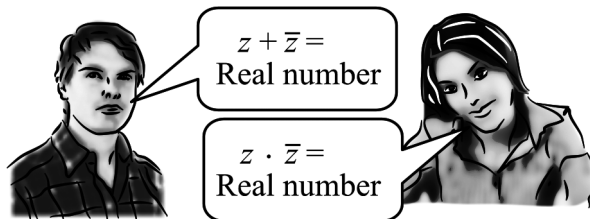
12. Write the expression $\frac{2+i}{3-i}$ on the form $a+bi$. (2/0/0)

13. A function is given by $f(x) = (2x-5)^6$
Calculate $f'(3)$. (2/0/0)

14. Conny and Yugat are discussing complex numbers.

Conny claims: “For all complex numbers, it holds that the sum of the number and its conjugate is always a real number”.

Yugat claims: “It's the product of the number and its conjugate that is always a real number”.



Investigate whether their claims are true. (1/1/0)

15. The expression $\frac{1 - \sin 2v}{\sin v - \cos v}$ is given.

a) Determine for which values of v the expression is not defined. (1/1/0)

b) Show that $\frac{1 - \sin 2v}{\sin v - \cos v}$ can be written as $\sin v - \cos v$
for all v where the expression is defined. (0/0/2)

16. A line is tangent to the graph of $f(x) = \sqrt{2x-1}$ at the point where $x = 5$
Determine the equation of the line. (0/3/0)
17. The equation $z^3 + 4z^2 + 3z + 12 = 0$ has one solution $z = -4$
Determine all the other solutions of the equation. (0/3/0)
18. Signe claims that the function $f(x) = |x-1| + x - 1$ never takes on negative values. Investigate whether Signe's claim is correct. (0/1/1)
19. A function is given by $f(x) = ax^2 - 6x + b \sin 3x$ where a and b are real constants. Investigate what values of a and b are possible if the function has a maximum for $x = 0$ (0/1/3)

Part D	Problems 20–27 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

The test consists of three written parts (part B, part C and part D). Together they give a total of 61 points consisting of 20 E-, 23 C- and 18 A-points.

- Level requirements for test grades
- E: 14 points
- D: 23 points of which 8 points on at least C-level
- C: 31 points of which 14 points on at least C-level
- B: 41 points of which 6 points on A-level
- A: 49 points of which 10 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled “*Only answer is required*” you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: _____
Date of birth: _____
Educational programme: _____

Part D: Digital resources are allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

20. The temperature in a greenhouse varies during a day in accordance with

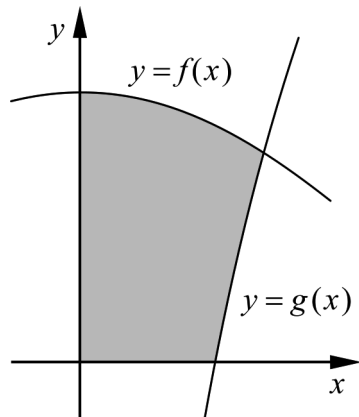
$$y = 20 + 15 \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)$$

where y is the temperature in $^{\circ}\text{C}$ and x is the time in hours counted from 9:00 in the morning.

- a) Determine at what time the temperature in the greenhouse is the highest. (2/0/0)
- b) Determine how fast the temperature in the greenhouse is increasing at 12:00. (2/0/0)

21. The figure shows the graphs of the functions $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}$ and $g(x) = 5\ln x$.

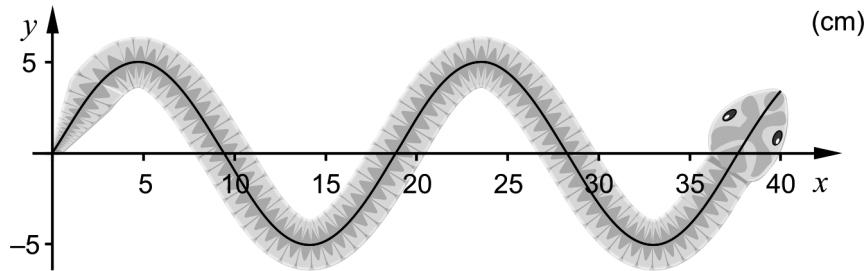
The graphs of the two functions together with the positive coordinate axes enclose the region shaded in the figure.



Determine the area of the shaded region and give your answer with at least three significant digits.

(2/1/0)

22. At a certain point in time, the shape of a common European adder slithering on the ground can be described with the simple model $y = 5 \sin\left(\frac{x}{3}\right)$, where x and y are distances in cm. See figure.



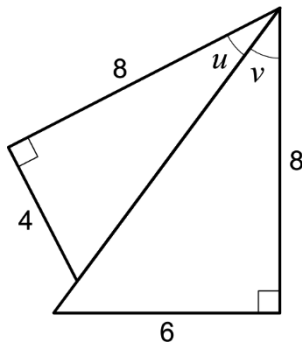
The tip of the adder's tail lies in the origin and the tip of the adder's head lies where $x = 40$

The length L of a curve given by $y = f(x)$ from $x = a$ to $x = b$ can be calculated using the formula $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Calculate the length of the adder.

(0/2/0)

23. In the figure, the angles u and v are marked.



The value of $\sin(u + v)$ can be written as $\frac{\sqrt{A}}{B}$ where A and B are integers.

Determine A and B .

(0/3/0)

24. Prior to admission to a university, all applicants take a test. The time allowed for the test is 2 hours. It turns out that the time t in hours used by the applicants to take the test has a distribution that can be described using the density function $f(t) = \frac{15t^5 - 7t^6}{32}$ where $0 \leq t \leq 2$

Determine the probability that an applicant finishes the test during the last half hour.

(0/2/0)

25. A region is bounded by the curve $y = x^2 - 4$ and the line $y = 5$. Determine the volume of the solid of revolution that is formed when this region is rotated around the line $y = 5$

(0/0/2)

26. The function h is defined by $h(x) = (f(x))^2$.

Determine $h''(0)$ for all functions f with the following properties:

- $f(0) = -1$
- $f'(0) = 3$
- $f''(0) = 2$

(0/1/3)

27. A laser pointer is placed on a rotating disc. Where the laser beam from the pointer hits the wall, a red dot can be seen. The distance between the wall and the centre of the rotating disc is L metres. At time $t = 0$ the laser beam is perpendicular to the wall, see figure 1.

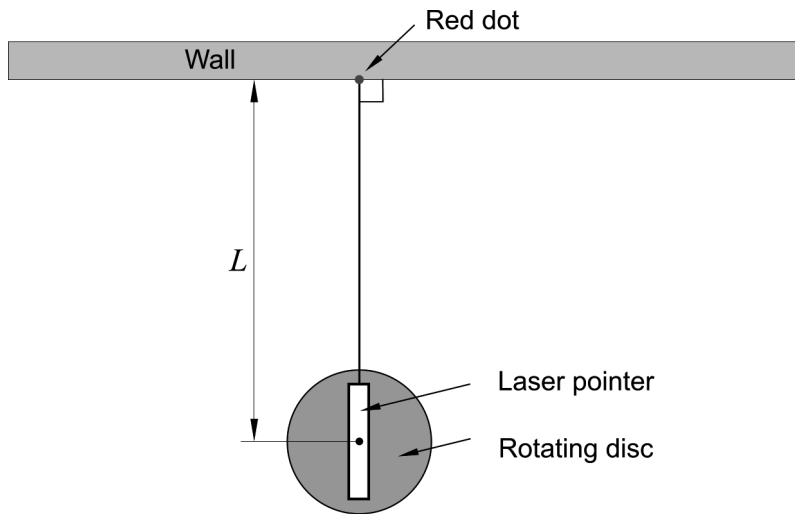


Figure 1

The disc with the laser pointer rotates so that the red dot moves to the right along the wall. At time t seconds, the disc has rotated by an angle α radians and the red dot has moved a distance of x metres along the wall. See figure 2.

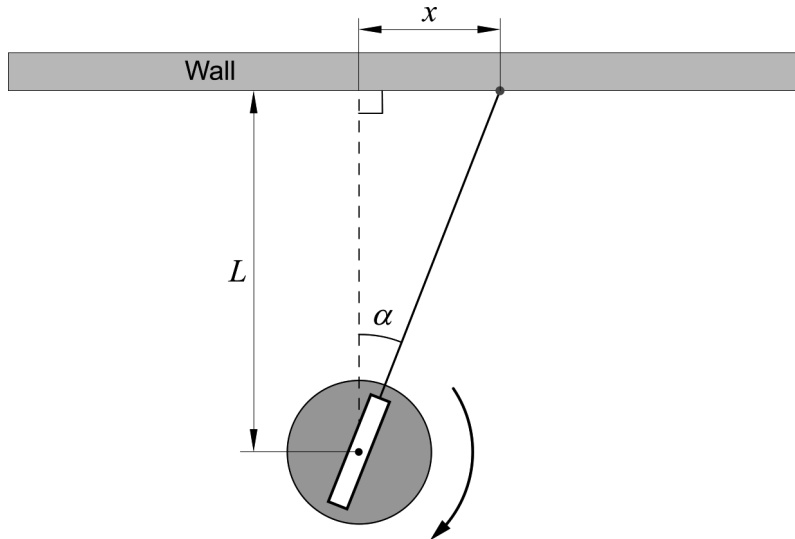


Figure 2

The disc rotates at a constant angular velocity C radians/s so that $\alpha = C \cdot t$.

The red dot moves along the wall at velocity $\frac{dx}{dt}$

Determine an expression for the velocity $\frac{dx}{dt}$

(0/0/2)

Innehållsförteckning

Inledning.....	4
Läsanvisning.....	4
1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4.....	5
Uppgifter av kortsvarstyp	5
Uppgifter av långsvarstyp	5
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga	6
Sammanställning av elevresultat	7
Sammanställning till ett provbetyg	7
2. Bedömningsanvisningar	8
Läsanvisning.....	8
Instruktioner för bedömning av delprov B.....	8
Instruktioner för bedömning av delprov C.....	10
Instruktioner för bedömning av delprov D	12
3. Exempel på bedömda elevlösningar.....	15
Uppgift 14	15
Uppgift 15b	17
Uppgift 16	18
Uppgift 17	20
Uppgift 18	22
Uppgift 19	24
Uppgift 20a	26
Uppgift 26	27
4. Instruktioner för sammanställning till ett provbetyg.....	30
Sammanställningen till ett provbetyg i samband med provet i matematik 4	30
Resultaten på provet i relation till kursbetyget	30
5. Instruktioner för inrapportering av provresultat.....	31
6. Kopieringsunderlag och webbmaterial.....	33
Webbmaterial.....	33
Formulär för sammanställning av elevresultat	34
Provsammanställning – centralt innehåll	35
Centralt innehåll matematik 4 – förkortningar	36

Inledning

På uppdrag av regeringen ansvarar Skolverket för samtliga nationella prov. Syftet med de nationella proven är i huvudsak att

- stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning
- ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapskraven uppfylls på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå.

De nationella proven kan också bidra till

- att konkretisera kurs- och ämnesplanerna
- en ökad måluppfyllelse för eleverna.

Det är rektorn som ansvarar för organisationen omkring provet på skolan och för att leda och fördela arbetet.

Läsanvisning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 4. Häftet består av 6 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma elevernas prestationer på de olika delproven (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanställningen till ett provbetyg (kapitel 4). De två avslutande kapitlen innehåller instruktioner för inrapportering av provresultat (kapitel 5) samt kopieringsunderlag och hänvisningar till webbmaterial (kapitel 6).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges de poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som provas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den huvudsakliga som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

Uppgifter av kortsvarstyp

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

Uppgifter av långsvarstyp

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. (Eventuella avvikelser från dessa modeller kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.)

Modell 1

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E_p
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 E_p

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen kan falla ut först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E _p
med korrekt bestämning av...	+1 E _p
Godtagbar verifiering av...	+1 E _p

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ...
1 E _R	1 E _R och 1 C _R	1 E _R , 1 C _R och 1 A _R

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

I samband med vissa uppgifter ska elevens skriftliga kommunikativa förmåga bedömas. Då gäller följande krav:

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \approx, \pm, \sqrt{\quad}, f(x), f'(x), f''(x), x, y, (\quad), [\quad], \int, dx$, gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v, \sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differentialekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

Sammanställning av elevresultat

När eleven har genomfört de olika delproven noteras resultaten i ”Formulär för sammanställning av elevresultat” som finns i kapitel 6. Syftet med formuläret är att underlätta för läraren att sammanställa och rapportera in elevens resultat. Det kan också användas vid samtal med eleven om provresultatet.

Sammanställning till ett provbetyg

När samtliga delprov är genomförda ska resultaten summeras till ett provbetyg. Information om hur summeringen går till finns i kapitel 4.

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

- | | | |
|-----------|---|-------------------|
| 1. | | Max 2/0/0 |
| a) | Korrekt svar $\left(120^\circ; \frac{2\pi}{3}\right)$ | +1 E _B |
| b) | Korrekt svar (-1) | +1 E _B |
| 2. | | Max 1/0/0 |
| | Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (2) | +1 E _B |
| 3. | | Max 1/0/0 |
| | Korrekt svar $\left(\frac{5\pi}{6}; 150^\circ\right)$ | +1 E _B |
| 4. | | Max 2/0/0 |
| a) | Korrekt svar $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | +1 E _B |
| b) | Korrekt svar $\left(-\frac{1}{2}\right)$ | +1 E _B |
| 5. | | Max 0/1/0 |
| | Korrekt svar (C) | +1 C _B |

6. **Max 0/1/0**

Korrekt svar $\left(C : y = \frac{x}{x-1} \right)$ +1 C_B

7. **Max 0/0/1**

Korrekt svar $(-3 < a < 0)$ +1 A_B

Kommentar: Även svaret $-3 \leq a \leq 0$ ges poäng.

8. **Max 0/0/1**

Korrekt svar $\left(t \text{ ex } F(x) = -\frac{\cos 10x}{20} \text{ eller } F(x) = \frac{\sin^2 5x}{10} \right)$ +1 A_{PL}

Kommentar: Även svar med samtliga primitiva funktioner ges poäng.

9. **Max 0/1/1**

Anger minst två korrekta alternativ +1 C_B

med korrekt svar $(f(x) + g(x) : D, f(x) \cdot g(x) : C, f(g(x)) : B, g(f(x)) : A)$ +1 A_B

10. **Max 0/0/2**

Markering av minst två godtagbara punkter och ingen felaktig punkt +1 A_B


med godtagbart svar $\left(\begin{array}{c} \text{Im } z \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \\ -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \text{Re } z \end{array} \right)$ +1 A_{PL}


Instruktioner för bedömning av delprov C


- 11.** **Max 2/1/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer minst en lösning till ekvationen, t ex $x = 15^\circ$ +1 E_P
- med godtagbar fortsättning, bestämmer minst två lösningar till ekvationen, t ex $x = 15^\circ + n \cdot 180^\circ$ +1 E_P
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar
($x = 15^\circ + n \cdot 180^\circ$ och $x = 75^\circ + n \cdot 180^\circ$) +1 C_P
-
- 12.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex förlänger med nämnarens konjugat, $\frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$ +1 E_P
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($0,5 + 0,5i$) +1 E_P
- Kommentar:* Även svaret $\frac{1+i}{2}$ ges poäng.
-
- 13.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer $f'(x)$ korrekt, $f'(x) = 6 \cdot 2(2x - 5)^5$ +1 E_P
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (12) +1 E_P
-
- 14.** **Max 1/1/0**
- Korrekt slutsats om båda påståendena utifrån undersökning av specialfall
eller
korrekt slutsats om minst ett av påståendena utifrån generell undersökning +1 E_R
- med välgrundat resonemang där korrekt slutsats dras om båda påståendena
utifrån generella undersökningar +1 C_R



Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"




- 15.** **Max 1/1/2**
- a) Godtagbar ansats, kommer fram till att $\tan v = 1$ ska lösas *eller* inser att $v = \frac{\pi}{4}$ är en lösning till $\sin v - \cos v = 0$ +1 E_B
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar +1 C_P
- $$\left(v = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi; v = 45^\circ + n \cdot 180^\circ \right)$$
- b) Godtagbar ansats, t ex skriver om täljaren med trigonometriska ettan och formeln för dubbla vinkeln +1 A_R
- med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 A_R
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 

- 16.** **Max 0/3/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer $f'(x)$ korrekt, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ +1 C_P
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $(y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3})$ +1 C_P
- Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 "Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga" +1 C_K
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 


- 17.** **Max 0/3/0**
- Godtagbar ansats, t ex faktorererar polynomet, $(z+4)(z^2+3)$ +1 C_P
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $(z = \pm i\sqrt{3})$ +1 C_P
- Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 "Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga" +1 C_K
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 

- 18.** **Max 0/1/1**
- Godtagbar ansats, t ex delar upp funktionen i två intervall, $x < 1$ och $x > 1$ +1 C_R
 med godtagbar generell undersökning med slutsatsen att Signes påstående är korrekt +1 A_R
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
- 19.** **Max 0/1/3**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer b korrekt, $b = 2$ +1 C_R
 med godtagbar fortsättning som visar att funktionen har maximum för $x = 0$ om $a < 0$ och $b = 2$ +1 A_R
 med i övrigt godtagbar lösning som även utreder fallet $a = 0$ med korrekt svar ($a < 0$ och $b = 2$) +1 A_R
 Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 "Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga" +1 A_K
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 

Instruktioner för bedömning av delprov D

- 20.** **Max 4/0/0**
- a) Godtagbar ansats, t ex bestämmer det värde på x som ger maximum, $x = 6$ +1 E_M
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (15.00) +1 E_M
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
- b) Godtagbar ansats, inser att $y'(3)$ ska bestämmas +1 E_M
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar inklusive korrekt enhet (2,8 °C/h) +1 E_M

- 21.** **Max 2/1/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer minst en av intervallgränserna $x = 1$ eller $x = 1,364$ +1 E_{PL}
- med godtagbar fortsättning, t ex tecknar ett korrekt uttryck för bestämning av någon relevant area, t ex $\int_1^{1,364} 5 \ln x \, dx$ +1 E_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (2,22 a.e.) +1 C_{PL}
- Kommentar:* Svar utan enhet eller med felaktig enhet ges poäng.
-
- 22.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, t ex ställer upp ett korrekt uttryck för beräkning av ormens längd, $\int_0^{40} \sqrt{1 + \left(\frac{5}{3} \cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2} \, dx$ +1 C_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (61 cm) +1 C_M
-
- 23.** **Max 0/3/0**
- Godtagbar ansats, t ex använder additionsformeln för sinus *och* bestämmer minst ett av värdena $\cos u$, $\cos v$, $\sin u$ eller $\sin v$ +1 C_{PL}
- med godtagbar fortsättning, t ex sätter in samtliga värden i additionsformeln, $\frac{6}{10} \cdot \frac{8}{\sqrt{80}} + \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{\sqrt{80}}$ +1 C_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (t ex $A = 80, B = 10$) +1 C_{PL}
-
- 24.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, t ex ställer upp korrekt integral, $\int_{1,5}^2 \frac{15t^5 - 7t^6}{32} \, dt$ +1 C_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,64) +1 C_M

- 25.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, inser att volymen består av skivor med radien $9 - x^2$
eller
 inser att funktionen kan förskjutas 5 enheter i y -led för att få rotation
 runt x -axeln +1 A_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (814 v.e.) +1 A_{PL}
- Kommentar:* Svar utan enhet eller med felaktig enhet ges poäng.
-
- 26.** **Max 0/1/3**
- Godtagbar ansats, bestämmer $h''(0)$ för ett specialfall
eller
 bestämmer $h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$ +1 C_P
- med godtagbar fortsättning,
 bestämmer $h''(x) = 2f'(x) \cdot f'(x) + 2f(x) \cdot f''(x)$ +1 A_P
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (14) +1 A_P
- Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig
 kommunikativ förmåga” +1 A_K
- Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”* 
-
- 27.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, t ex tecknar uttrycket $x = L \tan Ct$ +1 A_M
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\frac{dx}{dt} = \frac{CL}{\cos^2 Ct} \right)$ +1 A_M
- Kommentar:* Även svaret $\frac{dx}{dt} = \frac{CL}{\cos^2 \alpha}$ godtas.

3. Exempel på bedömda elevlösningar

I det här kapitlet finns exempel på bedömda elevlösningar till vissa uppgifter i provet samt kommentarer till exemplen som stöd för bedömningen.

Uppgift 14

Elevlösningsexempel 14.1 (1 ER)

$$z + \bar{z} = \text{Reellt tal} : \text{påstående 1}$$

$$z \cdot \bar{z} = \text{Reellt tal} : \text{påstående 2}$$

$$z = n + ni$$

$$P_1 = (n + ni) + (n - ni) = 2n$$

$$P_2 = (n + ni)(n - ni) =$$

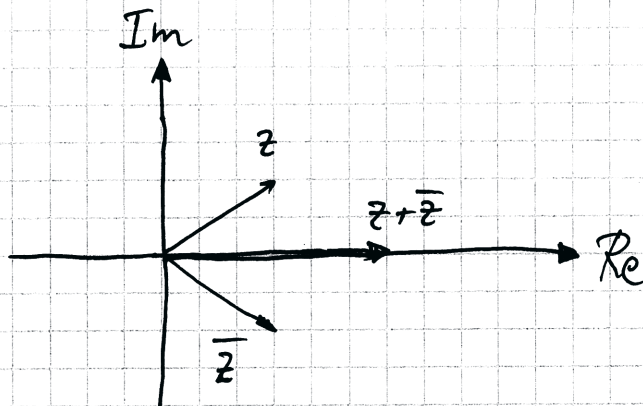
$$n^2 - \underbrace{n^2 i}_{-1} + \underbrace{n^2 i}_{-1} - n^2 \underbrace{(i^2)}_{-1} = n^2 + n^2$$

Svar: Både påstående 1 & 2 är sanna då de inte har en imaginär del.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller ett bevis för såväl summa som produkt men endast i de fall där $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$. Därmed anses lösningen inte uppfylla kraven för en generell undersökning. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 14.2 (1 ER och 1 CR)

- Bli^r summan av ett komplext tal reelt?



Svar: Ja det blir ett reelt tal

- Bli^r produkten ett reelt tal?

$$\begin{aligned}
 z \cdot \bar{z} &= (a+bi)(a-bi) = \\
 &= a^2 - abi + abi - (bi)^2 \\
 &= a^2 - (bi)^2 \\
 &= a^2 - (b^2(-1)) \\
 &= a^2 + b^2 \Rightarrow \text{Reelt tal.}
 \end{aligned}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller ett bevis för såväl summa som produkt. För beviset av summan används grafisk metod, vilket anses godtagbart. Sammantaget anses lösningen uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en resonemangspoäng på C-nivå.

Uppgift 15b

Elevlösningsexempel 15b.1 (1 AR)

$$\text{Vill visa: } \frac{1 - \sin 2v}{\sin v - \cos v} = \sin v - \cos v$$

trig. ettan & sindubbla vinkeln:

$$\frac{\sin^2 v + \cos^2 v - 2 \sin v \cos v}{\sin v - \cos v} = \sin v - \cos v$$

$$\sin^2 v + \cos^2 v - 2 \sin v \cos v = (\sin v - \cos v)^2$$

$$\sin^2 v + \cos^2 v - 2 \sin v \cos v = \sin^2 v - 2 \sin v \cos v + \cos^2 v$$

$$\therefore VL = HL \quad V.S.V.$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar ansats då täljaren skrivs om korrekt. Eftersom lösningen bygger på likheten som ska visas anses den dock inte uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på A-nivå.

Uppgift 16

Elevlösningsexempel 16.1 (2 Cp)

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \quad x = 5$$

$$\text{Tangenten } y = kx + m$$

$$x = 5 \rightarrow y = \sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 3$$

$$k = \frac{1}{2} (2 \cdot 5 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$3 = \frac{1}{3} \cdot 5 + m$$

$$\frac{9}{3} = \frac{5}{3} + m \rightarrow m = \frac{4}{3}$$

$$\text{Tangenten } y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar ansats då korrekt derivata används för att beräkna k även om det inte redovisas hur derivatan tagits fram. I den fortsatta lösningen beräknas tangentens ekvation korrekt. När det gäller kommunikation är lösningen svår att följa och förstå då inte alla beräkningar redovisas. Elevlösningen ges nätt och jämnt två procedurpoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 16.2 (2 C_P och 1 C_K)

Funktionerna möter varandra i punkten

$$(5, f(5)) = (5, 3)$$

Lutningen på linjen:

$$f(x) = (2x - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$$

$$f'(5) = \frac{1}{3} \quad y = \frac{1}{3}x + m \Rightarrow 3 = \frac{1}{3} \cdot 5 + m$$

$$m = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med korrekt svar. När det gäller kommunikation är lösningen möjlig att följa och förstå och matematiska symboler används godtagbart. Dock redovisas inte beräkningen av funktionsvärdet, $f(5)$, och derivatan, $f'(5)$. Sammantaget ges lösningen två procedurpoäng och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 17

Elevlösningsexempel 17.1 (2 Cp)

$$\begin{array}{r}
 z^2 + 3 \\
 \hline
 z^3 + 4z^2 + 3z + 12 \quad \boxed{z+4} \\
 - (z^3 + 4z^2) \\
 \hline
 3z + 12 \\
 - (3z + 12) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$z^2 + 3 = 0$$

$$z_1 = -4$$

$$z = \pm \sqrt{-3}$$

$$z_2 = \sqrt{3}i$$

$$z = \pm \sqrt{3}i^2$$

$$z_3 = -\sqrt{3}i$$

$$z = \pm \sqrt{3}i$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med korrekt svar. När det gäller kommunikation saknas förklaring till att $(z+4)$ är en faktor i polynomet. Lösningen ges två procedurpoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 17.2 (2 Cp och 1 Ck)

$$z^3 + 4z^2 + 3z + 12 = 0$$

$$z^3 + 4z^2 + 3z + 12 = (z+4) \cdot q(x)$$

$$\begin{array}{r}
 z^2 + 3 \\
 \hline
 z^3 + 4z^2 + 3z + 12 \quad | \quad z+4 \\
 - (z^3 + 4z^2) \\
 \hline
 3z + 12 \\
 - (3z + 12) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$q(x) = z^2 + 3$$

$$z^2 + 3 = 0$$

$$z^2 = -3$$

$$z = \pm \sqrt{-3}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Svar: } z_1 = \sqrt{3} \cdot i \\
 z_2 = -\sqrt{3} \cdot i
 \end{array}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med korrekt svar. När det gäller kommunikation anses rad två ” $z^3 + 4z^2 + 3z + 12 = (z+4) \cdot q(x)$ ” förklara att $(z+4)$ är en faktor i polynomet, trots att kvoten betecknas $q(x)$ istället för $q(z)$. Elevlösningen ges två procedurpoäng på C-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 18

Elevlösningsexempel 18.1 (1 CR)

$$f(x) = |x-1| + x-1$$

x	f(x)
-10	0
-8	0
-5	0
-1	0
1	0
2	2
3	4
0	0

Om $x < 0$ kommer absolutbeloppet i funktionen alltid bli $-x+1$ och x utanför absolutbeloppet kommer alltid vara negativt. Det gör att funktionen om $x < 0$ skulle se ut så här:

$$f(x) = -x+1 + x-1 = 0$$

Svaret kommer alltid bli 0 om $x < 0$

Om $x > 0$ kommer svaret alltid bli positivt.

Detta eftersom det som står inom absolutbeloppens markörerna kommer motsvara just $x-1$ vilket även det utanför absolutbeloppet kommer göra.

Det gör att funktionen kan skrivas som följande då $x > 0$:

$$f(x) = x-1 + x-1 = 2x-2$$

$$\text{Om } x=1 \text{ blir } f(x) = 2-2 = 0$$

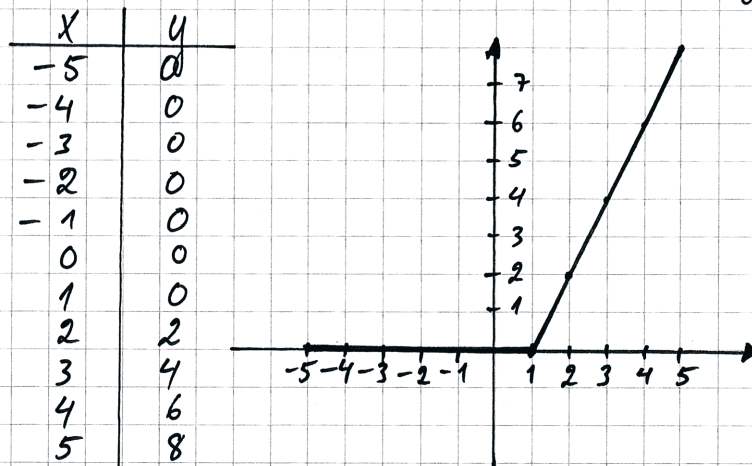
$$\text{Om } x=0 \text{ blir } f(x) = |0-1| + 0-1 = 1-1 = 0$$

Därefter blir $f(x) > 0$ för alla positiva värden på x .

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen genomförs ett resonemang där intervallet delas upp i $x > 0$ och $x < 0$ istället för i $x > 1$ och $x < 1$. Resonemanget är korrekt utom för intervallet $0 < x < 1$ vilket anses motsvara en godtagbar ansats. Lösningen ges en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 18.2 (1 CR)

Undersöker med tabell + skiss av graf.



Svar: Enligt min undersökning med tabell och en graf så kan aldrig funktionens värde vara lägre än noll. Alltså har Ligne rätt.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en undersökning med värdetabell och skiss av graf, vilket anses motsvara en godtagbar ansats. Undersökningen är inte generell och därför anses inte kraven för resonemangspoäng på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 18.3 (1 CR och 1 AR)

$$\underbrace{|x-1|}_a \quad \underbrace{x-1}_b$$

För att $f(x)$ ska bli negativt måste $(x-1)$ bli större negativt än vad $|x-1|$ blir positivt. Men med tanke på att $|x-1|$ blir samma sak som $(x-1)$ fast positivt kan $f(x)$ inte bli negativt.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett resonemang som anses uppfylla resonemangspoängen på A-nivå även om slutsatsen är något otydlig. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå och en resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 19

Elevlösningsexempel 19.1 (1 CR, 1 AR och 1 AK)

$$f(x) = ax^2 - 6x + b \sin 3x$$

$$f'(x) = 2ax - 6 + (b \cos 3x) \cdot 3 =$$

$$2ax - 6 + 3b \cos 3x$$

$$\text{Extrempunkt: } f'(x) = 0$$

$$f'(0) = 3b \cos 0 - 6 = 0$$

$$3b = 6$$

$$b = 2$$

$$f''(x) = 2a - 9b \sin 3x < 0 \text{ för maxpunkt}$$

$$f''(0) = 2a \quad a < 0$$

$$\therefore a < 0 \quad \underline{\underline{b = 2}}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en metod som ger rätt svar men där fallet $a = 0$ inte behandlats vilket gör att kraven för andra resonemangspoängen på A-nivå inte anses vara uppfyllda. När det gäller kommunikation anses lösningen vara lätt att följa och förstå trots att den är något knapphändig. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå, en resonemangspoäng på A-nivå och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 19.2 (1 CR, 2 AR och 1 AK)

$$f(x) = ax^2 - 6x + b \sin(3x)$$

$$a = ?$$

$$b = ? \Rightarrow \text{maximum för } x = 0$$

$$f'(x) = 2ax - 6 + 3b \cos(3x)$$

Då $x = 0$ ska ge en maximipunkt så är derivatan då $x = 0$ lika med noll.

$$\rightarrow f'(0) = 0$$

$$f'(0) = 2 \cdot a \cdot 0 - 6 + 3b \cos(3 \cdot 0)$$

$$= 3b \cos(0) - 6 = 0$$

$$\boxed{\cos(0) = 1} \quad 3b \cdot 1 = 6$$

$$b = \frac{6}{3} = 2$$

$$f''(x) = 2a - 9b \sin(3x)$$

$$f''(0) = 2a - 9b \sin(3 \cdot 0) \quad \boxed{\sin(0) = 0}$$

$$= 2a - 9b \sin(0) = 2a$$

För maximipunkt ska $f''(x) < 0$

$$\rightarrow 2a < 0 \rightarrow a < 0$$

$a = 0$ måste utredas. Det kan ge maxpunkt.

$$a = 0 \rightarrow f(x) = -6x + 2 \sin(3x)$$

$$f'(x) = -6 + 6 \cos(3x)$$

$$f'(0) = -6 + 6 \cos(0) = 0$$

x	0
$f'(x)$	- 0 -
$f(x)$	↘ ↘

$$f'(-\frac{\pi}{3}) = -6 + 6 \cos(3 \cdot (-\frac{\pi}{3})) = -6 - 6 = -12 < 0$$

$$f'(\frac{\pi}{3}) = -6 + 6 \cos(3 \cdot \frac{\pi}{3}) = -6 - 6 = -12 < 0$$

$a = 0 \rightarrow$ terrasspunkt

Alltså ska $a < 0$ och $b = 2$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar uppgiften löst i sin helhet. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå och matematiska symboler används med god anpassning till syfte och situation. Lösningen ges alla poäng som är möjliga att få.

Uppgift 20a

Elevlösningsexempel 20a.1 (0 poäng)

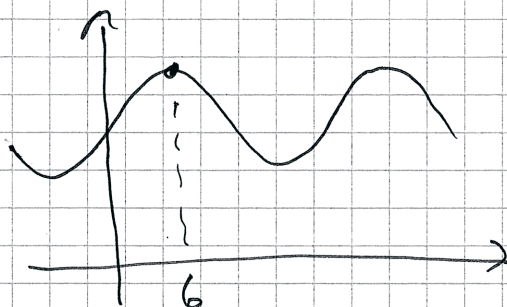
Räknaren ger $x = 6$

Svar: 15.00

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett korrekt svar. Eftersom redovisning av metod saknas anses lösningen inte vara godtagbar. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 20a.2 (1 EM)

Ritar på räknaren



Svar: Klockan 6.00

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en lösning med digitalt verktyg. Hänvisningen till räknaren tillsammans med graf anses vara tillräcklig för att motsvara en godtagbar ansats. Svaret är inte korrekt och därmed anses inte lösningen uppfylla kraven för den andra modelleringspoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 20a.3 (2 EM)

Ritar på räknaren och använder maximum

→ $x = 6$

Svar: 15.00

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en lösning med digitalt verktyg där hänvisningen anses vara tillräcklig. Trots att bestämningen av klockslaget inte redovisas anses lösningen vara godtagbar. Lösningen ges båda modelleringspoängen på E-nivå.

Uppgift 26

Elevlösningsexempel 26.1 (1 Cp)

$$\begin{array}{lll}
 f(0) = -1 & f(x) = x^2 + 3x - 1 & \rightarrow f(0) = -1 \\
 f'(0) = 3 & f'(x) = 2x + 3 & \rightarrow f'(0) = 3 \\
 f''(0) = 2 & f''(x) = 2 & \rightarrow f''(0) = 2
 \end{array}$$

$$h(x) = (f(x))^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

$$h'(x) = (2 \cdot (2x + 3))(x^2 + 3x - 1)$$

$$(4x + 6)(x^2 + 3x - 1) = 4x^3 + 12x^2 - 4x + 6x^2 + 18x - 6 =$$

$$4x^3 + 18x^2 + 14x - 6$$

$$h''(x) = 12x^2 + 36x + 14$$

$$h''(0) = 14$$

Svar: 14

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen utgår från ett specialfall som uppfyller de givna villkoren och innehåller en godtagbar redovisning av hur $h''(0)$ beräknas för detta specialfall. Detta anses motsvara en godtagbar ansats. Lösningen uppfyller därmed kraven för procedurpoängen på C-nivå.

Elevlösningsexempel 26.2 (1 Cp och 2 Ap)

$$f(0) = -1$$

$$f'(0) = 3$$

$$f''(0) = 2$$

$$h(x) = (f(x))^2$$

$$h'(x) = f$$

$$h(x) = f(x) \cdot f(x)$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot f(x)$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f(x)$$

$$= 3 \cdot -1 + 3 \cdot (-1)$$

$$= -3 - 3 = -6 \quad (\text{om det slutat})$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f(x) = 2 f'(x) \cdot f(x)$$

$$h''(x) = f'(x) \cdot f'(x) + f''(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f'(x) + f''(x) \cdot f(x)$$

$$h''(0) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)$$

$$= 9 + (-2) + 9 + (-2) = 14$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en godtagbar bestämning av $h''(0)$ för en generell funktion vilket uppfyller kraven för de tre procedurpoängen. När det gäller kommunikation innehåller lösningen ovidkommande och felaktig information på femte och sjunde raden som sedan inte används. Efter bestämningen av $h'(x)$ övergår detta till en ovidkommande bestämning av $h'(0)$ utan att beteckningen ändras. Dessa brister gör att lösningen inte blir helt lätt att följa och förstå och att kraven för kommunikationspoäng på A-nivå ej anses vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på C-nivå och två procedurpoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 26.3 (1 Cp, 2 Ap och 1 Ak)

$$h(x) = (f(x))^2$$

$$f(0) = -1$$

$$f'(0) = 3$$

$$h'(x) = 2(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$f''(0) = 2$$

$$h''(x) = 2 \cdot (f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x))$$

$$h''(0) = 2 \cdot (3 \cdot 3 + (-1) \cdot 2)$$

$$h''(0) = 2 \cdot 7$$

$$h''(0) = 14$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen utgår från en generell funktion där $h''(0)$ bestäms korrekt. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå och det matematiska språket är korrekt. Sammantaget ges lösningen samtliga poäng som är möjliga att få.