Delprov B	Uppgift 1–10. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 11–19. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för delprov B och delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 20 E-, 23 C- och 18 A-poäng.

Gräns för provbetyget
E: 14 poäng
D: 23 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 31 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

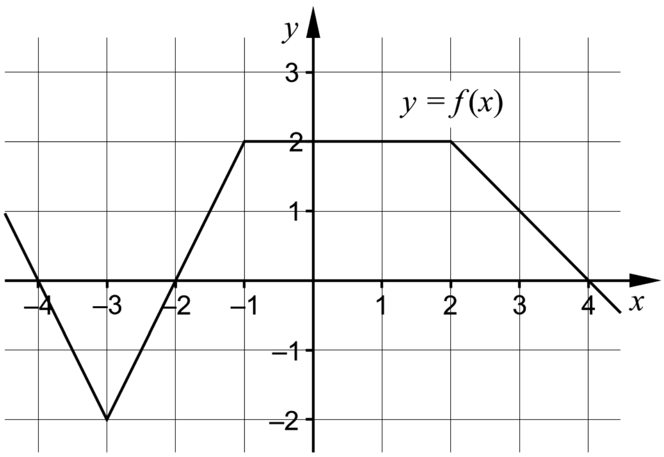
Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i elevhäftet.

1. En funktion ges av $f(x) = 1 + 2\sin 3x$.

a) Ange funktionens period. ________________________ (1/0/0)

b) Ange funktionens minsta värde. ________________________ (1/0/0)

2. Figuren visar grafen till en funktion f.



Bestäm $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$. ________________________ (1/0/0)

3. Det komplexa talet $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ är givet på polär form.

Bestäm $\arg(z^5)$. ________________________ (1/0/0)

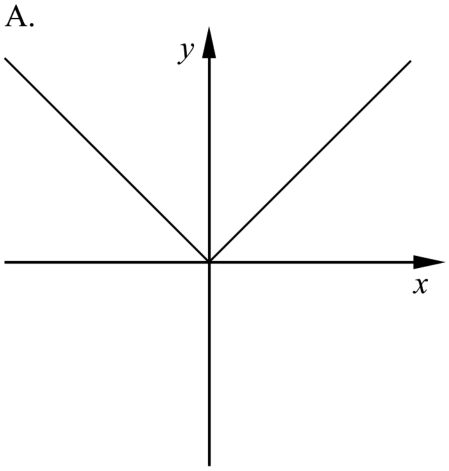
4. Bestäm det exakta värdet av

a) $\cos 390°$ ________________________ (1/0/0)

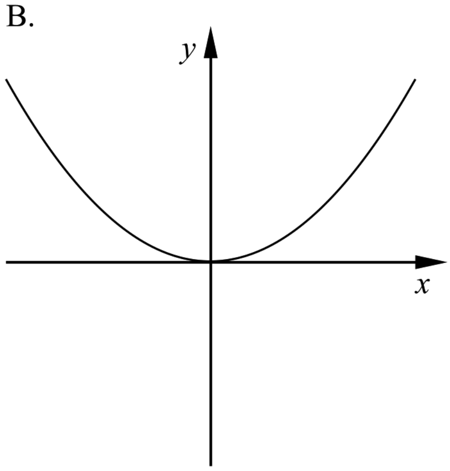
b) $\sin 210°$ ________________________ (1/0/0)

5. Alternativen A–F visar sex olika kurvor.

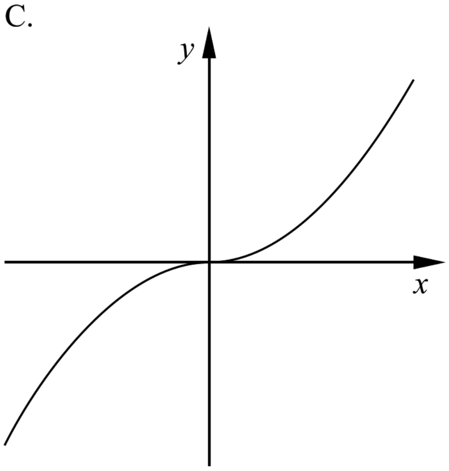
A.



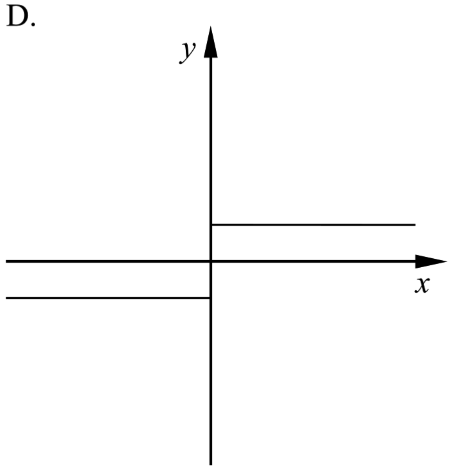
B.



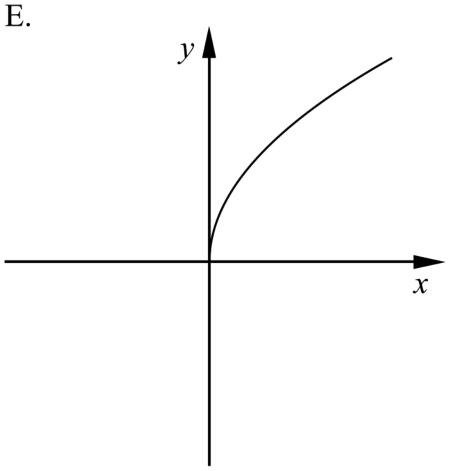
C.



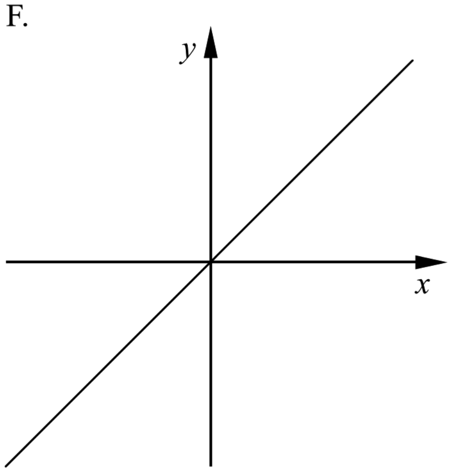
D.



E.



F.



Ett av alternativen A–F visar kurvan $y = x \cdot |x|$

Vilket? ______________________ (0/1/0)

6. Alternativen A–E beskriver fem olika kurvor.

A. $y = \dfrac{1}{x}$

B. $y = \dfrac{1}{x-1}$

C. $y = \dfrac{x}{x-1}$

D. $y = \dfrac{x+1}{x}$

E. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Ett av alternativen A–E beskriver en kurva som endast har två asymptoter, $x = 1$ och $y = 1$

Vilket? ______________________ (0/1/0)

7. För varje reellt värde på konstanten a har ekvationen $z - 3 = a(1 - \mathrm{i})$ en rot.

För vilka värden på a ligger roten i första kvadranten i det komplexa talplanet?

______________________ (0/0/1)

8. Bestäm en primitiv funktion till funktionen $f(x) = \sin 5x \cos 5x$.

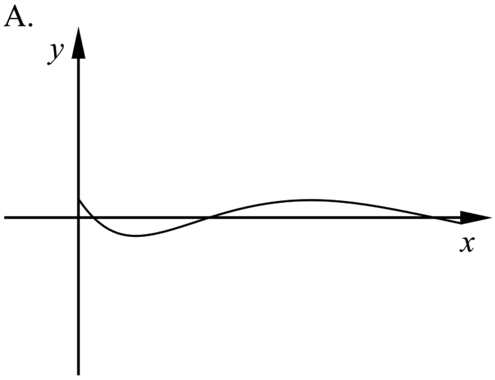
______________________ (0/0/1)

9. Av funktionerna $f(x) = \sqrt{x}$ och $g(x) = \cos(x)$ bildas fyra nya funktioner:

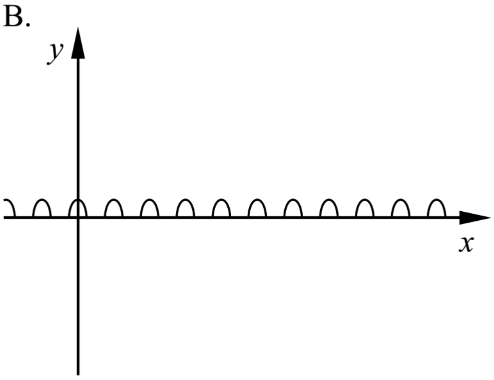
$f(x) + g(x)$
$f(x) \cdot g(x)$
$f(g(x))$
$g(f(x))$

Nedan visas graferna till dessa fyra nya funktioner ritade i samma skala.

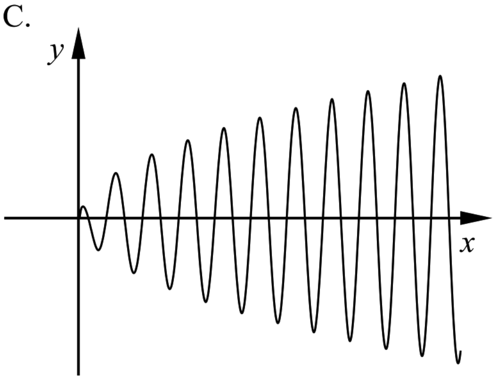
A.



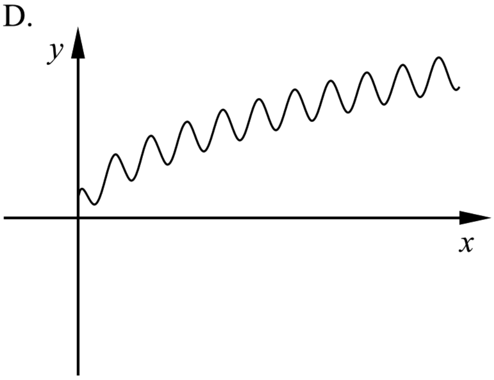
B.



C.



D.



Ange vilken graf A–D som hör ihop med respektive funktion.

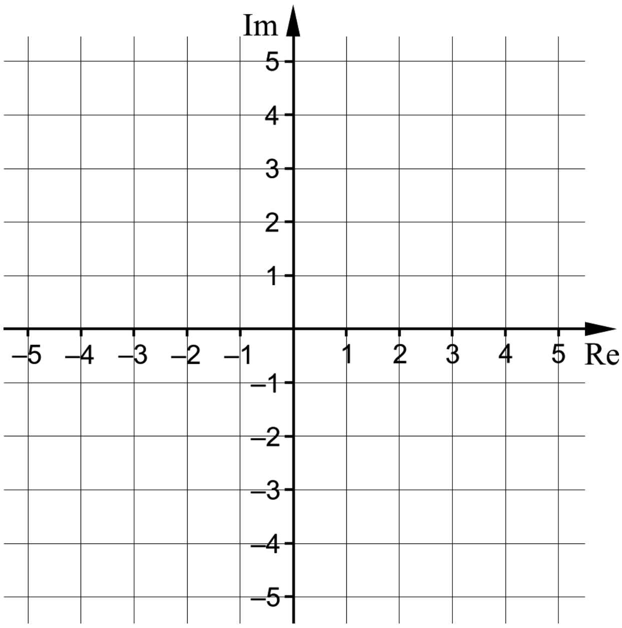
$f(x) + g(x)$ ____________________

$f(x) \cdot g(x)$ ____________________

$f(g(x))$ ____________________

$g(f(x))$ ____________________ (0/1/1)

10. Markera i det komplexa talplanet alla z som uppfyller villkoret $|z+\overline{z}|=|z-\overline{z}|$.



(0/0/2)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

11. Lös ekvationen $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$ (2/1/0)

12. Skriv uttrycket $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$ på formen $a+b\mathrm{i}$. (2/0/0)

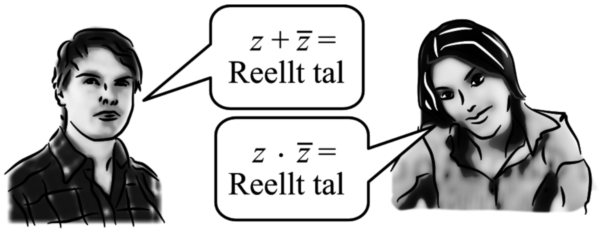
13. En funktion ges av $f(x) = (2x-5)^6$

Beräkna $f'(3)$. (2/0/0)

14. Conny och Yugat diskuterar komplexa tal.

Conny påstår: ”För alla komplexa tal gäller att summan av talet och dess konjugat alltid blir ett reellt tal”.

Yugat påstår: ”Det är produkten av talet och dess konjugat som alltid blir ett reellt tal”.



Undersök om deras påståenden är sanna. (1/1/0)

15. Uttrycket $\dfrac{1-\sin 2v}{\sin v - \cos v}$ är givet.

a) Avgör för vilka värden på v som uttrycket inte är definierat. (1/1/0)

b) Visa att $\dfrac{1-\sin 2v}{\sin v - \cos v}$ kan skrivas som $\sin v - \cos v$

för alla v där uttrycket är definierat. (0/0/2)

16. En linje tangerar grafen till $f(x)=\sqrt{2x-1}$ i den punkt där $x=5$
Bestäm linjens ekvation. (0/3/0)

17. Ekvationen $z^3+4z^2+3z+12=0$ har en lösning $z=-4$
Bestäm övriga lösningar till ekvationen. (0/3/0)

18. Signe påstår att funktionen $f(x)=|x-1|+x-1$ aldrig antar negativa värden.
Undersök om Signes påstående är korrekt. (0/1/1)

19. En funktion ges av $f(x)=ax^2-6x+b\sin 3x$ där a och b är reella konstanter. Undersök vilka värden på a och b som är möjliga om funktionen har ett maximum då $x=0$ (0/1/3)

Delprov D	Uppgift 20–27. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 20 E-, 23 C- och 18 A-poäng.

Gräns för provbetyget
E: 14 poäng
D: 23 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 31 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

20. Temperaturen i ett växthus varierar under ett dygn enligt

$$y = 20 + 15\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)$$

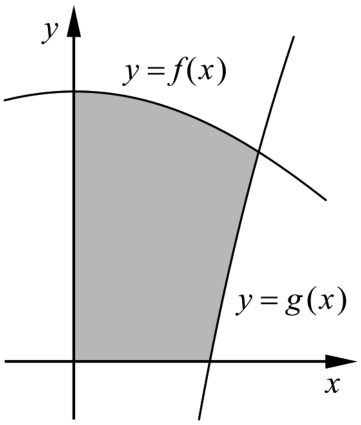
där y är temperaturen i °C och x är tiden i timmar räknat från klockan 9.00.

a) Bestäm vid vilket klockslag som temperaturen i växthuset är högst. (2/0/0)

b) Bestäm hur snabbt temperaturen ökar i växthuset klockan 12.00. (2/0/0)

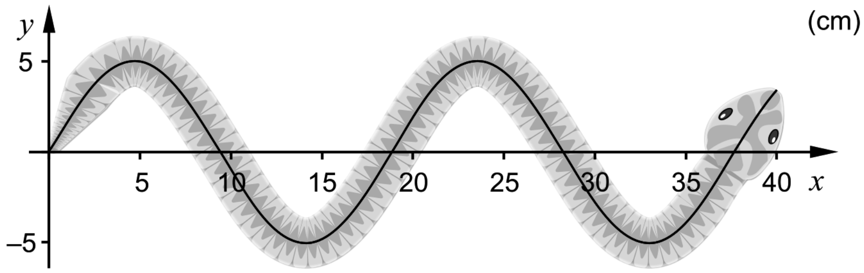
21. Figuren visar graferna till funktionerna $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}$ och $g(x) = 5\ln x$.

De två funktionernas grafer innesluter tillsammans med de positiva koordinataxlarna det område som skuggats i figuren.



Bestäm arean av det skuggade området och svara med minst tre värdesiffror. (2/1/0)

22. Vid ett visst tillfälle kan formen av en huggorm som ringlar längs marken beskrivas med den enkla modellen $y = 5\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$, där x och y är sträckor i cm. Se figur.

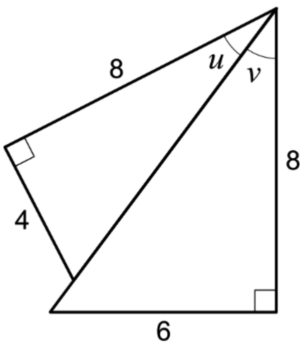


Ormens svansspets ligger i origo och ormens nos där $x = 40$

Längden L av en kurva som ges av $y = f(x)$ från $x = a$ till $x = b$ kan beräknas med formeln $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.

Beräkna ormens längd. (0/2/0)

23. I figuren är vinklarna u och v markerade.



Värdet på $\sin(u+v)$ kan skrivas som $\dfrac{\sqrt{A}}{B}$ där A och B är heltal.

Bestäm A och B. (0/3/0)

24. Inför antagningen till en högskola skriver alla sökande ett prov. Provtiden är 2 timmar. Det har visat sig att tiden t timmar som de sökande använder för att skriva provet har en fördelning som kan beskrivas med täthetsfunktionen

$$f(t) = \frac{15t^5 - 7t^6}{32} \quad \text{där} \quad 0 \le t \le 2$$

Bestäm sannolikheten att en sökande blir klar med provet under den sista halvtimmen. (0/2/0)

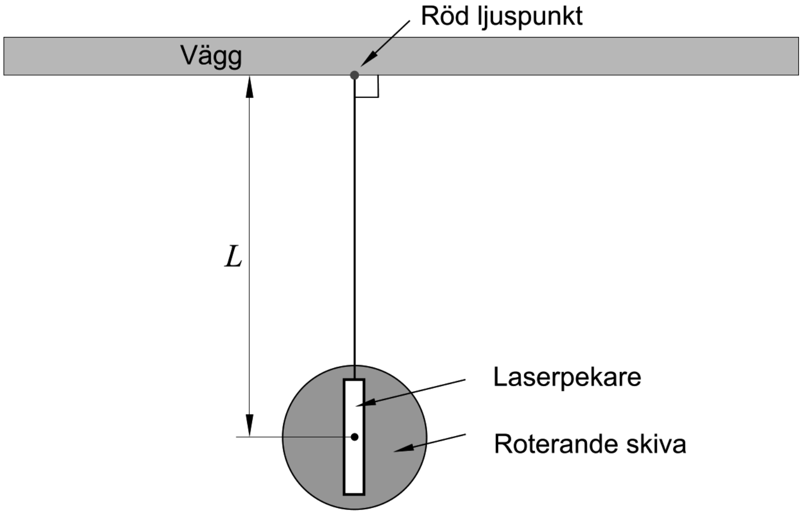
25. Ett område begränsas av kurvan $y = x^2 - 4$ och linjen $y = 5$
Bestäm volymen som bildas när detta område roterar runt linjen $y = 5$ (0/0/2)

26. Funktionen h definieras genom $h(x) = (f(x))^2$.

Bestäm $h''(0)$ för alla funktioner f med följande egenskaper:

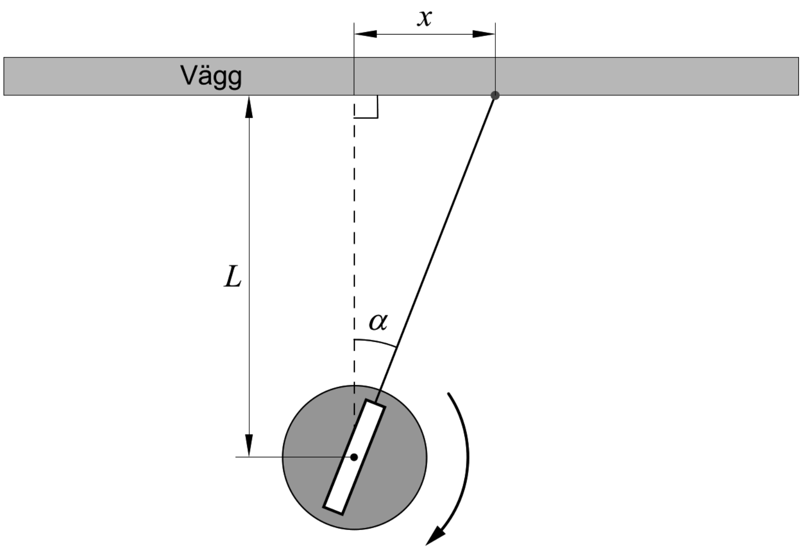
- $f(0) = -1$
- $f'(0) = 3$
- $f''(0) = 2$ (0/1/3)

27. En laserpekare är placerad på en roterande skiva. Där laserstrålen från laserpekaren träffar en vägg syns en röd ljuspunkt. Avståndet mellan väggen och den roterande skivans mittpunkt är L meter. Vid tiden $t = 0$ lyser laserstrålen vinkelrätt mot väggen, se figur 1.



Figur 1

Skivan med laserpekaren roterar så att den röda ljuspunkten rör sig åt höger längs väggen. Vid tiden t sekunder har skivan roterat vinkeln α radianer och ljuspunkten rört sig sträckan x meter längs väggen. Se figur 2.



Figur 2

Skivan roterar med konstant vinkelhastighet C radianer/s så att $\alpha = C \cdot t$.

Ljuspunkten rör sig längs väggen med hastigheten $\dfrac{dx}{dt}$

Bestäm ett uttryck för hastigheten $\dfrac{dx}{dt}$ (0/0/2)

Innehållsförteckning

Inledning

På uppdrag av regeringen ansvarar Skolverket för samtliga nationella prov. Syftet med de nationella proven är i huvudsak att

- stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning
- ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapskraven uppfylls på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå.

De nationella proven kan också bidra till

- att konkretisera kurs- och ämnesplanerna
- en ökad måluppfyllelse för eleverna.

Det är rektorn som ansvarar för organisationen omkring provet på skolan och för att leda och fördela arbetet.

Läsanvisning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 4. Häftet består av 6 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma elevernas prestationer på de olika delproven (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanställningen till ett provbetyg (kapitel 4). De två avslutande kapitlen innehåller instruktioner för inrapportering av provresultat (kapitel 5) samt kopieringsunderlag och hänvisningar till webbmaterial (kapitel 6).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges de poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den huvudsakliga som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

Uppgifter av kortsvarstyp

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

Uppgifter av långsvarstyp

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. (Eventuella avvikelser från dessa modeller kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.)

Modell 1

Godtagbar ansats, t.ex. …	$+1\ E_P$
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	$+1\ E_P$

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen kan falla ut först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med korrekt bestämning av…	+1 E_P
Godtagbar verifiering av…	+1 E_P

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … $1\ E_R$	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … $1\ E_R$ och $1\ C_R$	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … $1\ E_R$, $1\ C_R$ och $1\ A_R$

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

I samband med vissa uppgifter ska elevens skriftliga kommunikativa förmåga bedömas. Då gäller följande krav:

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{\ }$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int$, dx, gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v$, $\sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differentialekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

Sammanställning av elevresultat

När eleven har genomfört de olika delproven noteras resultaten i ”Formulär för sammanställning av elevresultat” som finns i kapitel 6. Syftet med formuläret är att underlätta för läraren att sammanställa och rapportera in elevens resultat. Det kan också användas vid samtal med eleven om provresultatet.

Sammanställning till ett provbetyg

När samtliga delprov är genomförda ska resultaten summeras till ett provbetyg. Information om hur summeringen går till finns i kapitel 4.

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar $\left(120°; \dfrac{2\pi}{3}\right)$	+1 E_B
b)	Korrekt svar (-1)	+1 E_B
2.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (2)	+1 E_B
3.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar $\left(\dfrac{5\pi}{6}; 150°\right)$	+1 E_B
4.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$	+1 E_B
b)	Korrekt svar $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$	+1 E_B
5.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar (C)	+1 C_B

6. **Max 0/1/0**

Korrekt svar $\left(C: y = \dfrac{x}{x-1} \right)$ +1 C_B

7. **Max 0/0/1**

Korrekt svar ($-3 < a < 0$) +1 A_B

Kommentar: Även svaret $-3 \le a \le 0$ ges poäng.

8. **Max 0/0/1**

Korrekt svar $\left(\text{t ex } F(x) = -\dfrac{\cos 10x}{20} \text{ eller } F(x) = \dfrac{\sin^2 5x}{10} \right)$ +1 A_{PL}

Kommentar: Även svar med samtliga primitiva funktioner ges poäng.

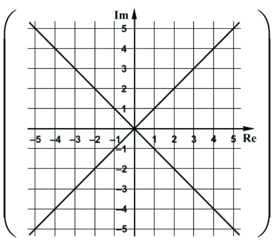
9. **Max 0/1/1**

Anger minst två korrekta alternativ +1 C_B

med korrekt svar ($f(x)+g(x)$: D, $f(x) \cdot g(x)$: C, $f(g(x))$: B, $g(f(x))$: A) +1 A_B

10. **Max 0/0/2**

Markering av minst två godtagbara punkter och ingen felaktig punkt +1 A_B

med godtagbart svar 

+1 A_{PL}

Instruktioner för bedömning av delprov C

11. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer minst en lösning till ekvationen, t ex $x = 15°$ +1 E_P

med godtagbar fortsättning, bestämmer minst två lösningar till ekvationen, t ex $x = 15° + n \cdot 180°$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = 15° + n \cdot 180°$ och $x = 75° + n \cdot 180°$) +1 C_P

12. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex förlänger med nämnarens konjugat, $\frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($0,5 + 0,5i$) +1 E_P

Kommentar: Även svaret $\frac{1+i}{2}$ ges poäng.

13. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer $f'(x)$ korrekt, $f'(x) = 6 \cdot 2(2x-5)^5$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (12) +1 E_P

14. **Max 1/1/0**

Korrekt slutsats om båda påståendena utifrån undersökning av specialfall
eller
korrekt slutsats om minst ett av påståendena utifrån generell undersökning +1 E_R

med välgrundat resonemang där korrekt slutsats dras om båda påståendena utifrån generella undersökningar +1 C_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

15. **Max 1/1/2**

a) Godtagbar ansats, kommer fram till att $\tan v = 1$ ska lösas *eller* inser att $v = \frac{\pi}{4}$ är en lösning till $\sin v - \cos v = 0$ — +1 E_B

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(v = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi;\ v = 45° + n \cdot 180° \right)$ — +1 C_P

b) Godtagbar ansats, t ex skriver om täljaren med trigonometriska ettan och formeln för dubbla vinkeln — +1 A_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis — +1 A_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

16. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, bestämmer $f'(x)$ korrekt, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ — +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$) — +1 C_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” — +1 C_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

17. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t ex faktoriserar polynomet, $(z+4)(z^2+3)$ — +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z = \pm i\sqrt{3}$) — +1 C_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” — +1 C_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

18. **Max 0/1/1**

Godtagbar ansats, t ex delar upp funktionen i två intervall, $x < 1$ och $x > 1$ +1 C_R

med godtagbar generell undersökning med slutsatsen att Signes påstående är korrekt +1 A_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

19. **Max 0/1/3**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer b korrekt, $b = 2$ +1 C_R

med godtagbar fortsättning som visar att funktionen har maximum för $x = 0$ om $a < 0$ och $b = 2$ +1 A_R

med i övrigt godtagbar lösning som även utreder fallet $a = 0$ med korrekt svar ($a < 0$ och $b = 2$) +1 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 A_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

Instruktioner för bedömning av delprov D

20. **Max 4/0/0**

a) Godtagbar ansats, t ex bestämmer det värde på x som ger maximum, $x = 6$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (15.00) +1 E_M

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

b) Godtagbar ansats, inser att $y'(3)$ ska bestämmas +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar inklusive korrekt enhet (2,8 °C/h) +1 E_M

21. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer minst en av intervallgränserna $x = 1$ eller $x = 1,364$ +1 E_{PL}

med godtagbar fortsättning, t ex tecknar ett korrekt uttryck för bestämning av någon relevant area, t ex $\int_{1}^{1,364} 5\ln x\,\mathrm{d}x$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (2,22 a.e.) +1 C_{PL}

Kommentar: Svar utan enhet eller med felaktig enhet ges poäng.

22. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex ställer upp ett korrekt uttryck för beräkning av ormens längd, $\int_{0}^{40} \sqrt{1+\left(\frac{5}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}x$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (61 cm) +1 C_M

23. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t ex använder additionsformeln för sinus *och* bestämmer minst ett av värdena $\cos u$, $\cos v$, $\sin u$ eller $\sin v$ +1 C_{PL}

med godtagbar fortsättning, t ex sätter in samtliga värden i additionsformeln, $\frac{6}{10}\cdot\frac{8}{\sqrt{80}}+\frac{8}{10}\cdot\frac{4}{\sqrt{80}}$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (t ex $A = 80$, $B = 10$) +1 C_{PL}

24. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex ställer upp korrekt integral, $\int_{1,5}^{2} \frac{15t^5 - 7t^6}{32}\,\mathrm{d}t$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,64) +1 C_M

25. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, inser att volymen består av skivor med radien $9-x^2$
eller
inser att funktionen kan förskjutas 5 enheter i y-led för att få rotation runt x-axeln +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (814 v.e.) +1 A_{PL}

Kommentar: Svar utan enhet eller med felaktig enhet ges poäng.

26. **Max 0/1/3**

Godtagbar ansats, bestämmer $h''(0)$ för ett specialfall
eller
bestämmer $h'(x)=2f(x)\cdot f'(x)$ +1 C_P

med godtagbar fortsättning,
bestämmer $h''(x)=2f'(x)\cdot f'(x)+2f(x)\cdot f''(x)$ +1 A_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (14) +1 A_P

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 A_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

27. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex tecknar uttrycket $x=L\tan Ct$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{CL}{\cos^2 Ct}\right)$ +1 A_M

Kommentar: Även svaret $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{CL}{\cos^2\alpha}$ godtas.

3. Exempel på bedömda elevlösningar

I det här kapitlet finns exempel på bedömda elevlösningar till vissa uppgifter i provet samt kommentarer till exemplen som stöd för bedömningen.

Uppgift 14

Elevlösningsexempel 14.1 (1 E_R)

$z + \bar{z}$ = Reellt tal : påstående 1

$z \cdot \bar{z}$ = Reellt tal : påstående 2

$z = n + ni$

$$P_1 = (n+ni) + (n-ni) = 2n$$

$$P_2 = (n+ni)(n-ni) =$$

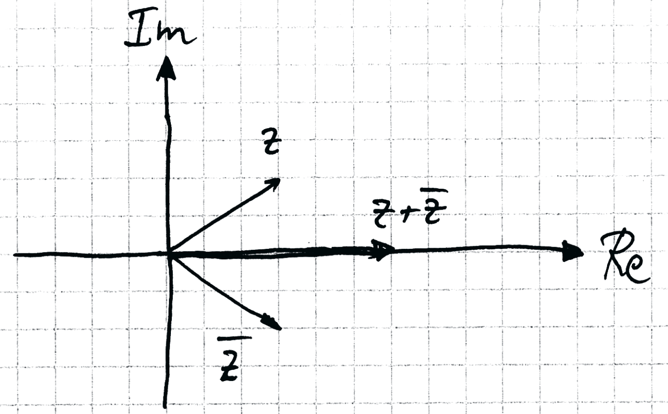
$$n^2 - \underline{n^2 i} + \underline{n^2 i} - n^2 \underbrace{i^2}_{=-1} = n^2 + n^2$$

Svar: Både påstående 1 & 2 är sanna då de inte har en imaginär del.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller ett bevis för såväl summa som produkt men endast i de fall där $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$. Därmed anses lösningen inte uppfylla kraven för en generell undersökning. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 14.2 (1 E_R och 1 C_R)

• Blir summan av ett komplext tal reelt?



Svar: Ja det blir ett reelt tal

• Blir produkten ett reelt tal?

$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) =$

$= a^2 - abi + abi - (bi)^2$

$= a^2 - (bi)^2$

$= a^2 - (b^2 \cdot (-1))$

$= a^2 + b^2 \Rightarrow$ Reelt tal.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller ett bevis för såväl summa som produkt. För beviset av summan används grafisk metod, vilket anses godtagbart. Sammantaget anses lösningen uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en resonemangspoäng på C-nivå.

Uppgift 15b

Elevlösningsexempel 15b.1 (1 A_R)

Vill visa: $\dfrac{1-\sin 2v}{\sin v-\cos v} = \sin v - \cos v$

trig. ettan & sindubbla vinkeln:

$$\frac{\sin^2 v + \cos^2 v - 2\sin v\cos v}{\sin v - \cos v} = \sin v - \cos v$$

$$\sin^2 v + \cos^2 v - 2\sin v\cos v = (\sin v - \cos v)^2$$

$$\sin^2 v + \cos^2 v - 2\sin v\cos v = \sin^2 v - 2\sin v\cos v + \cos^2 v$$

$\therefore$ VL = HL V.S.V.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar ansats då täljaren skrivs om korrekt. Eftersom lösningen bygger på likheten som ska visas anses den dock inte uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på A-nivå.

Uppgift 16

Elevlösningsexempel 16.1 (2 Cp)

$f(x) = \sqrt{2x-1} \qquad x = 5$

Tangenten $y = kx + m$

$x = 5 \rightarrow y = \sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 3$

$k = \frac{1}{2}(2 \cdot 5 - 1)^{-1/2} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

$3 = \frac{1}{3} \cdot 5 + m$

$\frac{9}{3} = \frac{5}{3} + m \rightarrow m = \frac{4}{3}$

Tangenten $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar ansats då korrekt derivata används för att beräkna *k* även om det inte redovisas hur derivatan tagits fram. I den fortsatta lösningen beräknas tangentens ekvation korrekt. När det gäller kommunikation är lösningen svår att följa och förstå då inte alla beräkningar redovisas. Elevlösningen ges nätt och jämnt två procedurpoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 16.2 (2 C_P och 1 C_K)

Funktionerna möter varandra i punkten

$(5, f(5)) = (5,3)$

Lutningen på linjen:

$f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

$f'(5) = \frac{1}{3}$ $\quad y = \frac{1}{3}x + m$ $\Rightarrow$ $3 = \frac{1}{3} \cdot 5 + m$

$m = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

$\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med korrekt svar. När det gäller kommunikation är lösningen möjlig att följa och förstå och matematiska symboler används godtagbart. Dock redovisas inte beräkningen av funktionsvärdet, $f(5)$, och derivatan, $f'(5)$. Sammantaget ges lösningen två procedurpoäng och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 17

Elevlösningsexempel 17.1 (2 CP)

$$z^2 + 3$$

$$z^3 + 4z^2 + 3z + 12 \;\; \big| \; z+4$$

$$-\left(z^3 + 4z^2\right)$$

$$3z + 12$$

$$-\left(3z + 12\right)$$

$$0$$

$$z^2 + 3 = 0$$

$$z = \pm\sqrt{-3}$$

$$z = \pm\sqrt{3i^2}$$

$$z = \pm\sqrt{3}\,i$$

$$z_1 = -4$$

$$z_2 = \sqrt{3}\,i$$

$$z_3 = -\sqrt{3}\,i$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med korrekt svar. När det gäller kommunikation saknas förklaring till att $(z+4)$ är en faktor i polynomet. Lösningen ges två procedurpoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 17.2 (2 C_P och 1 C_K)

$$z^3 + 4z^2 + 3z + 12 = 0$$

$$z^3 + 4z^2 + 3z + 12 = (z+4) \cdot q(x)$$

$$z^2 + 3$$

$$z^3 + 4z^2 + 3z + 12 \;\big|\; z+4$$

$$-(z^3 + 4z^2)$$

$$3z + 12$$

$$-(3z + 12)$$

$$0$$

$$q(x) = z^2 + 3$$

$$z^2 + 3 = 0$$

$$z^2 = -3$$

$$z = \pm\sqrt{-3}$$

<u>Svar</u>: $z_1 = \sqrt{3} \cdot i$

$z_2 = -\sqrt{3} \cdot i$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med korrekt svar. När det gäller kommunikation anses rad två ” $z^3 + 4z^2 + 3z + 12 = (z+4) \cdot q(x)$ ” förklara att $(z+4)$ är en faktor i polynomet, trots att kvoten betecknas $q(x)$ istället för $q(z)$. Elevlösningen ges två procedurpoäng på C-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 18

Elevlösningsexempel 18.1 (1 CR)

$f(x) = |x-1| + x - 1$

x	$f(x)$
−10	0
−8	0
−5	0
−1	0
1	0
2	2
3	4
0	0

Om $x<0$ kommer absolutbeloppet i funktionen alltid bli $-x+1$ och x utanför absolutbeloppet kommer alltid vara negativt. Det gör att funktionen om $x<0$ skulle se ut så här:

$\underline{f(x) = -x+1+x-1=0}$

Svaret kommer alltid bli 0 om $x<0$

Om $x>0$ kommer svaret alltid bli positivt. Detta eftersom det som står inom absolutbelopps-markörerna kommer motsvara just $x-1$ vilket även det utanför absolutbeloppet kommer göra. Det gör att funktionen kan skrivas som följande då $x>0$:

$f(x) = x-1+x-1 = 2x-2$

Om $x=1$ blir $f(x) = 2-2=0$

Om $x=0$ blir $f(x) = |0-1|+0-1 = 1-1=0$

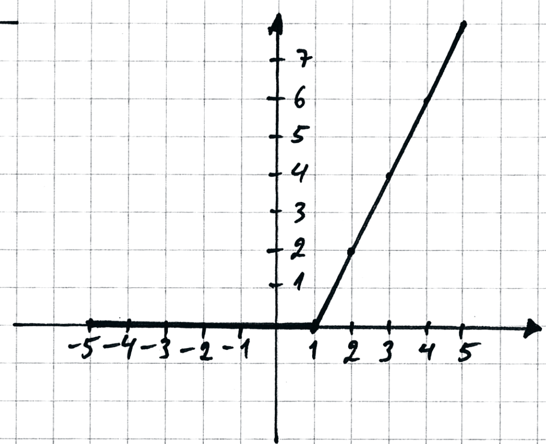
Därefter blir $f(x)>0$ för alla positiva värden på x.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen genomförs ett resonemang där intervallet delas upp i $x>0$ och $x<0$ istället för i $x>1$ och $x<1$. Resonemanget är korrekt utom för intervallet $0<x<1$ vilket anses motsvara en godtagbar ansats. Lösningen ges en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 18.2 (1 C_R)

Undersöker med tabell + skiss av graf.

x	y
−5	0
−4	0
−3	0
−2	0
−1	0
0	0
1	0
2	2
3	4
4	6
5	8



Svar: Enligt min undersökning med tabell och en graf så kan aldrig funktionens värde vara lägre än noll. Alltså har Signe rätt.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en undersökning med värdetabell och skiss av graf, vilket anses motsvara en godtagbar ansats. Undersökningen är inte generell och därför anses inte kraven för resonemangspoäng på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 18.3 (1 C_R och 1 A_R)

$\underbrace{|x-1|}_{a} \qquad \underbrace{x-1}_{b}$

För att f(x) ska bli negativt måste (x−1) bli större negativt än vad |x−1| blir positivt. Men med tanke på att |x−1| blir samma tal som (x−1) fast positivt kan f(x) inte bli negativt

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett resonemang som anses uppfylla resonemangspoängen på A-nivå även om slutsatsen är något otydlig. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå och en resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 19

Elevlösningsexempel 19.1 (1 C_R, 1 A_R och 1 A_K)

$$f(x) = ax^2 - 6x + b\sin 3x$$

$$f'(x) = 2ax - 6 + (b\cos 3x)\cdot 3 =$$

$$2ax - 6 + 3b\cos 3x$$

Extrempunkt : $f'(x) = 0$

$$f'(0) = 3b\cos 0 - 6 = 0$$

$$3b = 6$$

$$b = 2$$

$f''(x) = 2a - 9b\sin 3x \quad < 0$ för maxpunkt

$$f''(0) = 2a \qquad a < 0$$

$$\therefore\ a < 0 \quad \underline{\underline{o}} \quad b = 2$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en metod som ger rätt svar men där fallet $a = 0$ inte behandlats vilket gör att kraven för andra resonemangspoängen på A-nivå inte anses vara uppfyllda. När det gäller kommunikation anses lösningen vara lätt att följa och förstå trots att den är något knapphändig. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå, en resonemangspoäng på A-nivå och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 19.2 (1 CR, 2 AR och 1 AK)

$f(x) = ax^2 - 6x + b\sin(3x)$

$a = ?$

$b = ?$ $\Rightarrow$ maximum för $x = 0$

$f'(x) = 2ax - 6 + 3b\cos(3x)$

Då $x = 0$ ska ge en maximipunkt så är derivatan då $x = 0$ lika med noll.

$\rightarrow f'(0) = 0$

$f'(0) = 2 \cdot a \cdot 0 - 6 + 3b\cos(3 \cdot 0)$

$= 3b\cos(0) - 6 = 0$

$\boxed{\cos(0) = 1}$ $3b \cdot 1 = 6$

$b = \frac{6}{3} = 2$

$f''(x) = 2a - 9b\sin(3x)$

$f''(0) = 2a - 9b\sin(3 \cdot 0)$ $\boxed{\sin(0) = 0}$

$= 2a - 9b\sin(0) = 2a$

För maximipunkt ska $f''(x) < 0$

$\rightarrow 2a < 0 \rightarrow a < 0$

$a = 0$ måste utredas. Det kan ge maxpunkt.

$a = 0 \rightarrow f(x) = -6x + 2\sin(3x)$

$f'(x) = -6 + 6\cos(3x)$

$f'(0) = -6 + 6\cos(0) = 0$

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

$f'(-\frac{\pi}{3}) = -6 + 6\cos(3 \cdot (-\frac{\pi}{3})) = -6 - 6 = -12 < 0$

$f'(\frac{\pi}{3}) = -6 + 6\cos(3\frac{\pi}{3}) = -6 - 6 = -12 < 0$

$a = 0 \rightarrow$ terasspunkt

Alltså ska $\underline{a < 0}$ och $\underline{b = 2}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar uppgiften löst i sin helhet. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå och matematiska symboler används med god anpassning till syfte och situation. Lösningen ges alla poäng som är möjliga att få.

Uppgift 20a

Elevlösningsexempel 20a.1 (0 poäng)

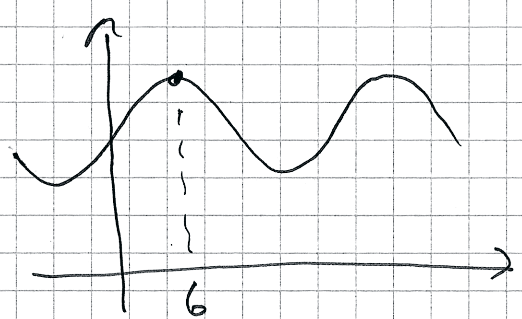
Räknaren ger x = 6

Svar: 15.00

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett korrekt svar. Eftersom redovisning av metod saknas anses lösningen inte vara godtagbar. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 20a.2 (1 EM)

Ritar på räknaren



Svar: Klockan 6.00

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en lösning med digitalt verktyg. Hänvisningen till räknaren tillsammans med graf anses vara tillräcklig för att motsvara en godtagbar ansats. Svaret är inte korrekt och därmed anses inte lösningen uppfylla kraven för den andra modelleringspoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 20a.3 (2 EM)

Ritar på räknaren och använder maximum

→ x = 6

Svar: 15.00

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en lösning med digitalt verktyg där hänvisningen anses vara tillräcklig. Trots att bestämningen av klockslaget inte redovisas anses lösningen vara godtagbar. Lösningen ges båda modelleringspoängen på E-nivå.

Uppgift 26

Elevlösningsexempel 26.1 (1 Cp)

$f(0) = -1 \quad f(x) = x^2 + 3x - 1 \rightarrow f(0) = -1$

$f'(0) = 3 \quad f'(x) = 2x + 3 \rightarrow f'(0) = 3$

$f''(0) = 2 \quad f''(x) = 2 \rightarrow f''(0) = 2$

$h(x) = (f(x))^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$

$h'(x) = (2 \cdot (2x+3))(x^2 + 3x - 1)$

$(4x + 6)(x^2 + 3x - 1) = 4x^3 + 12x^2 - 4x + 6x^2 + 18x - 6 =$

$4x^3 + 18x^2 + 14x - 6$

$h''(x) = 12x^2 + 36x + 14$

$h''(0) = 14$

Svar: 14

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen utgår från ett specialfall som uppfyller de givna villkoren och innehåller en godtagbar redovisning av hur $h''(0)$ beräknas för detta specialfall. Detta anses motsvara en godtagbar ansats. Lösningen uppfyller därmed kraven för procedurpoängen på C-nivå.

Elevlösningsexempel 26.2 (1 CP och 2 AP)

$f(0) = -1$

$f'(0) = 3$

$f''(0) = 2$

$h(x) = (f(x))^2$

$h'(x) = f$

$h(x) = f(x) \cdot f(x)$

$h'(x) = f'(x) \cdot f'(x)$

$h'(x) = f'(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f(x)$

$= 3 \cdot -1 + 3 \cdot (-1)$

$= -3 - 3 = -6$ (om det slutat)

$h'(x) = f'(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f(x) \quad = 2f'(x) \cdot f(x)$

$h''(x) = f'(x) \cdot f'(x) + f''(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f'(x) + f''(x) \cdot f(x)$

$h''(0) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)$

$= 9 + (-2) + 9 + (-2) = 14$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en godtagbar bestämning av $h''(0)$ för en generell funktion vilket uppfyller kraven för de tre procedurpoängen. När det gäller kommunikation innehåller lösningen ovidkommande och felaktig information på femte och sjunde raden som sedan inte används. Efter bestämningen av $h'(x)$ övergår detta till en ovidkommande bestämning av $h'(0)$ utan att beteckningen ändras. Dessa brister gör att lösningen inte blir helt lätt att följa och förstå och att kraven för kommunikationspoäng på A-nivå ej anses vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på C-nivå och två procedurpoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 26.3 (1 C_P, 2 A_P och 1 A_K)

$h(x) = (f(x))^2$

$f(0) = -1$

$f'(0) = 3$

$f''(0) = 2$

$h'(x) = 2(f(x)) \cdot f'(x)$

$h''(x) = 2 \cdot (f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x))$

$h''(0) = 2 \cdot (3 \cdot 3 + (-1 \cdot 2))$

$h''(0) = 2 \cdot 7$

$h''(0) = 14$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen utgår från en generell funktion där $h''(0)$ bestäms korrekt. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå och det matematiska språket är korrekt. Sammantaget ges lösningen samtliga poäng som är möjliga att få.