Part B	Problems 1–10 which only require answers.
Part C	Problems 11–19 which require complete solutions.
Test time	150 minutes for part B and part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

The test consists of three written parts (part B, part C and part D).
Together they give a total of 60 points consisting of 22 E-, 22 C- and 16 A-points.

Level requirements for test grades
E: 15 points
D: 24 points of which 7 points on at least C-level
C: 31 points of which 13 points on at least C-level
B: 40 points of which 5 points on A-level
A: 47 points of which 9 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled "*Only answer is required*" you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: ______________________________

Date of birth: ______________________________

Educational programme: ______________________________

Part B: Digital tools are not allowed. *Only answer is required*. Write your answers in the test booklet.

1. Differentiate

a) $f(x) = \sin 5x$ $f'(x) =$ ____________________ (1/0/0)

b) $g(x) = (5x+2)^{10}$ $g'(x) =$ ____________________ (1/0/0)

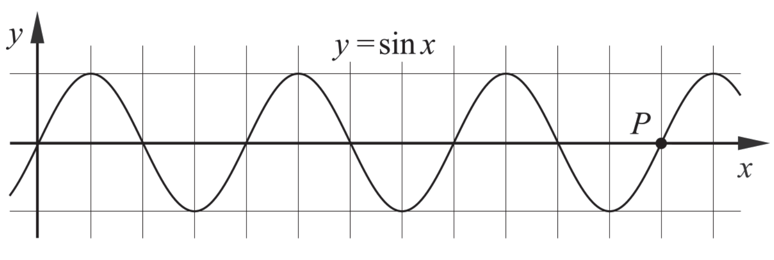
c) $h(x) = x^7 \cdot e^x$ $h'(x) =$ ____________________ (1/0/0)

2. The function f is given by $f(x) = 2 + 5\cos 4x$.

a) Write down the period of the function. ____________________ (1/0/0)

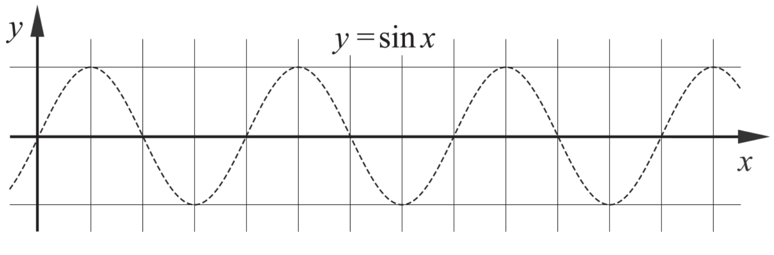
b) Write down the least value of the function. ____________________ (1/0/0)

3. The figure shows the curve $y = \sin x$ and a point P.
The point P lies on the curve and has y-coordinate 0



a) Write down the x-coordinate of the point P.
Give your answer in radians. ____________________ (1/0/0)

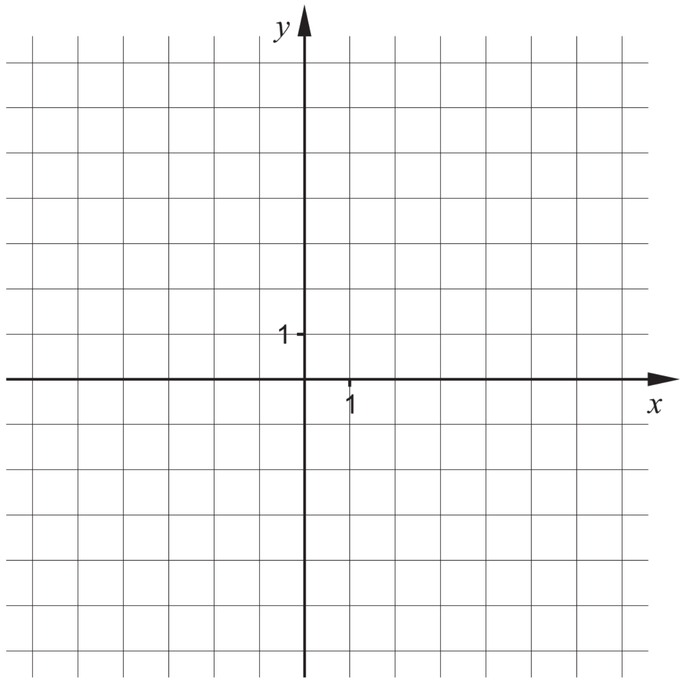
b) Sketch the curve $y = \sin\frac{x}{2}$ in the coordinate system. As an aid, the curve $y = \sin x$ has already been drawn.



(1/0/0)

4. A curve is given by $y = \dfrac{3}{x+2} + x - 1$

Draw the asymptotes of the curve in the coordinate system.

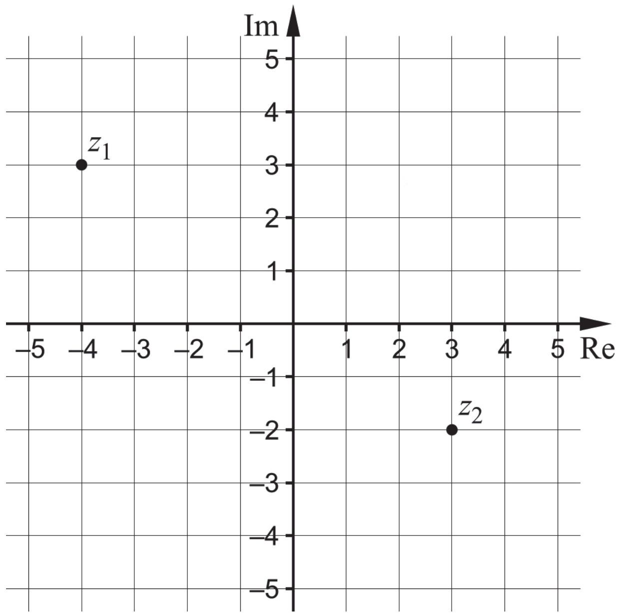


(1/1/0)

5. Determine $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x)\,dx$. ______________________ (0/1/0)

6. Determine $|z|$ if $z = e^{2+i\pi}$ ______________________ (0/1/0)

7. The figure shows the complex plane with the numbers z_1 and z_2 marked.



a) Determine $\overline{z}_1$ ______________________ (1/0/0)

b) Determine $\arg(z_2 - 1)$ ______________________ (0/1/0)

c) Mark all complex numbers z satisfying $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im}(z + z_2)$ (0/0/1)

8. Determine $\int_0^{\pi} (g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x))\,\mathrm{d}x$

if $g(x) = \cos x$ and $h(x) = x^2$ ______________________ (0/0/1)

9. Write down a non-real root of the equation $z^{10} - 1 = 0$

______________________ (0/0/1)

10. A region in the first quadrant is bounded by the curve $y = x^{\frac{1}{4}}$, the line $y = 2$ and the y-axis. When this region revolves around the y-axis, a solid of revolution is formed, whose volume is given by $\pi\int_0^2 g(y)\,\mathrm{d}y$.

Write down the function g. $g(y) =$ ______________________ (0/0/1)

Part C: Digital tools are not allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

11. Write $\dfrac{8+6\text{i}}{1+2\text{i}}$ on the form $a+b\text{i}$. (2/0/0)

12. Solve the equation $\sin 4x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2/1/0)

13. Show that $\dfrac{z-\overline{z}}{2\text{i}} = \operatorname{Im} z$ for all complex numbers z. (2/0/0)

14. The functions f and g are given by $f(z) = z^4 + 2z^3 + 9z^2 - 2z - 10$ and $g(z) = z^2 - 1$

a) Show that $f(z)$ is divisible by $g(z)$. (0/1/0)

b) Solve the equation $f(z) = 0$ (0/2/0)

15. Show that $\dfrac{\sin x}{\cos x - \sin x} + \dfrac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \tan 2x$. (0/2/0)

16. The angle v satisfies the following conditions:

- $\sin^2 v = \dfrac{8}{9}$
- $90° < v < 180°$

Determine $\tan v$. (0/3/0)

17. The function f is given by $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+1}$

Determine the constants a and b so that $f(1) = 4$ and $f'(1) = 3$ (0/3/0)

18. Show that the equation $\sin v \cos 40° = \sin v + \cos v \sin 40°$ has no solutions in the interval $0° \leq v \leq 90°$ (0/0/2)

19. The function f has a primitive function $F(x) = 3x \ln x$ and the function g has a primitive function $G(x) = x(\ln x)^2 + 3x$.

Determine the roots of the equation $f(x) = g(x)$. (0/0/2)

Part D	Problems 20–27 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital tools, formula sheet and ruler.

The test consists of three written parts (part B, C and D).
Together they give a total of 60 points consisting of 22 E-, 22 C- and 16 A-points.

Level requirements for test grades
E: 15 points
D: 24 points of which 7 points on at least C-level
C: 31 points of which 13 points on at least C-level
B: 40 points of which 5 points on A-level
A: 47 points of which 9 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled "*Only answer is required*" you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital tools.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

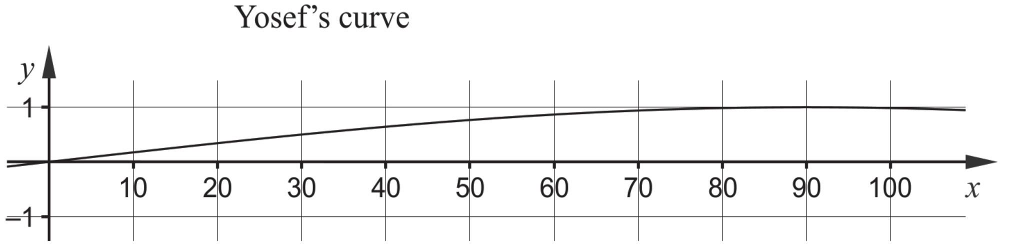
Name: ______________________________

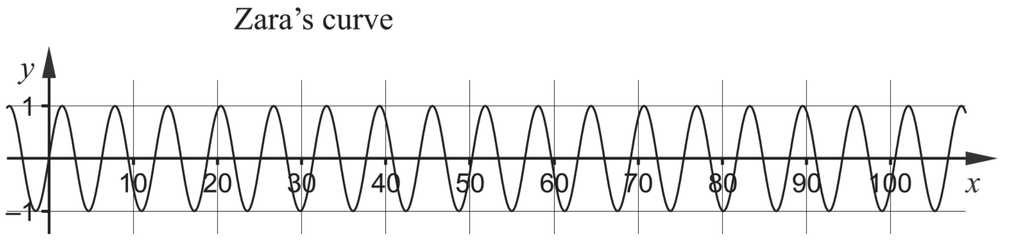
Date of birth: ______________________________

Educational programme: ______________________________

Part D: Digital tools are allowed. Several of the tasks require that you use digital tools to solve them. For the other tasks, it can be an advantage to use digital tools when solving the task. Write down your solutions on separate sheets of paper.

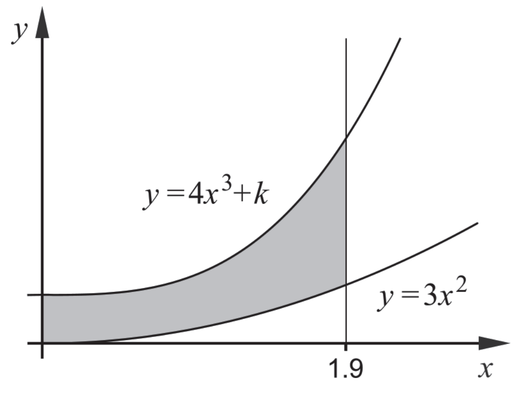
20. Yosef and Zara each draw the curve $y = \sin x$ using their digital tools. When they compare their curves, they discover that the curves look different. See figure.





Explain why the curves differ like this. (1/0/0)

21. The figure shows a shaded region bounded by the y-axis, the line $x = 1.9$ and the curves $y = 3x^2$ and $y = 4x^3 + k$ where k is a positive constant.



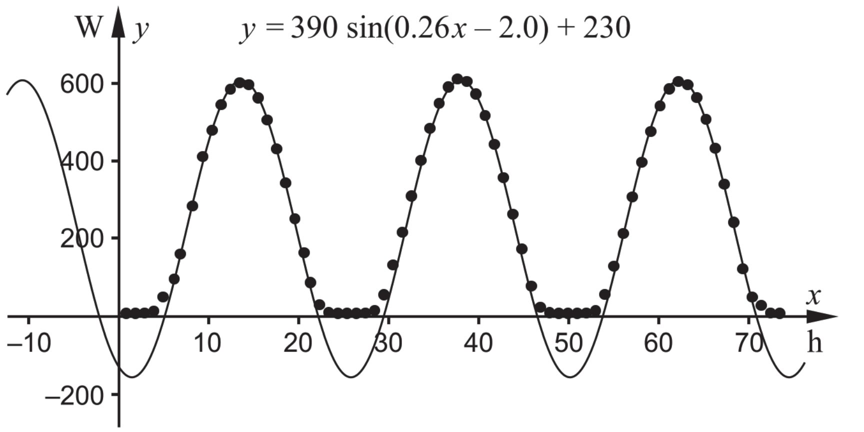
For one particular value of k, the area of the shaded region is 13 area units.

Determine this value of k. Give your answer to at least one decimal place. (2/0/0)

22. In a solar panel, energy from solar radiation is transformed into electricity.

Sunny has put up a small solar panel and measures the power it generates during a few cloud-free days. She discovers that the measurements vary periodically and fits a sine curve to the measurements. The equation of the sine curve is $y = 390\sin(0.26x - 2.0) + 230$ where x is the time in hours counting from 00:00 on July 23, 2020 and y is the power in watt (W).

The figure shows her measurements and the fitted sine curve.

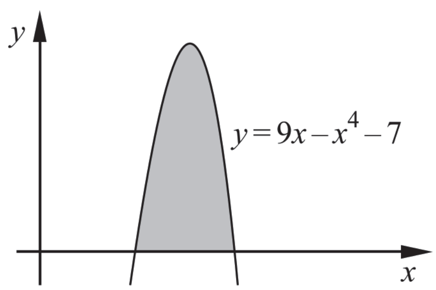


a) Determine how large the power was at 19:00 on July 23, 2020. Give your answer to at least two significant digits.

Only answer is required (1/0/0)

b) Determine the rate of change of the power at 15:30 on July 23, 2020 measured in W/h. Give your answer to at least two significant digits. (2/0/0)

23. The figure shows a shaded region bounded by the curve $y = 9x - x^4 - 7$ and the x-axis. The shaded region is rotated around the x-axis and forms a solid of revolution.



Determine the volume of the solid of revolution. Give your answer to at least two decimal places. (0/2/0)

24. The students in class TE19C have been to a lecture, and are therefore late for the subsequent maths class that started at 12:00.

The number of minutes a student is late for the maths class can be described by a probability distribution with density function $f(t) = 0.02t \cdot e^{-0.01t^2}$ where t is the number of minutes a student is late for the maths class.

Determine how many of the 32 students in TE19C have reached the maths class by 12:05. (0/2/0)

25. During a windy day, the wind speed at a wind power plant can be described by the model

$v(x) = 11\sin(0.11x - 0.89) + 28, \quad 0 \le x \le 24$

where v is the wind speed in km/h and x is the time in hours counting from 00:00.

a) Determine the fastest wind speed during this day.
Only answer is required (1/0/0)

At wind speeds above 36 km/h the turbine blades are set at an angle to reduce wear.

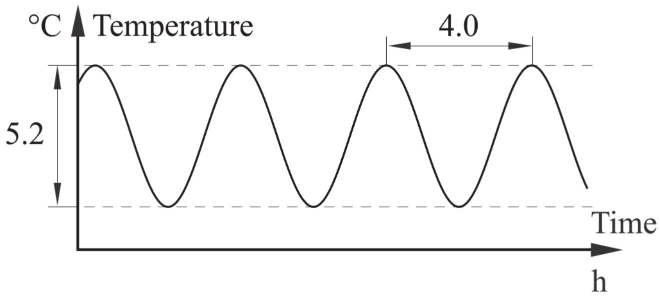
b) Determine for how long the wind speed is above 36 km/h during the day in question. (0/1/0)

At wind speeds between 0 and 36 km/h the amount of electrical energy produced can be calculated using the formula $P(v) = 0.42 \cdot v^3$ where $P(v)$ is the amount of electrical energy generated per hour in MJ/h and v is the wind speed in km/h.

At wind speeds above 36 km/h the amount of electrical energy produced per hour is the same as for wind speeds of 36 km/h.

c) Determine the total amount of electrical energy generated by the wind power plant during this day. (0/0/3)

26. The temperature in a cold storage room varies periodically with a period of 4.0 h because of a malfunctioning cooling unit. The difference in temperature between the highest and lowest temperatures is 5.2 °C. See figure.



At 08:30 the temperature is maximal and one hour later it has gone down to 3.9 °C.

The temperature in the cold storage room can be described by the model

$T(t) = A \cdot \cos(Bt + C) + D$

where $T(t)$ is the temperature in °C and t is the time in hours counting from 00:00.

Determine the constants A, B, C and D. *Only answer is required* (0/1/2)

27. Let $C = \int_a^b (7x - x^2 - 10)\,\mathrm{d}x$ where $a < b$.

a) Determine the value of $(b - a)$ when C assumes its maximum value. *Only answer is required* (0/0/1)

b) Determine the maximum value $(b - a)$ can assume if $C = 0$
Give your answer to at least one decimal place. (0/0/2)

Innehållsförteckning

Inledning

På uppdrag av regeringen ansvarar Skolverket för samtliga nationella prov. Syftet med de nationella proven är att stödja en likvärdig och rättvis betygssättning.

I årskurs 3 i grundskolan och motsvarande skolformer är syftet att stödja bedömningen av uppnådda kunskapskrav.

De nationella proven kan också bidra till att stärka skolornas kvalitetsarbete genom analyser av provresultaten i relation till uppnådda kunskapskrav på skolnivå, huvudmannanivå och på nationell nivå.

Det är rektorn som ansvarar för organisationen omkring provet på skolan och för att leda och fördela arbetet.

Läsanvisning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 4. Häftet består av 6 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma elevernas prestationer på de olika delproven (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanställningen till ett provbetyg (kapitel 4). De två avslutande kapitlen innehåller instruktioner för inrapportering av provresultat (kapitel 5) samt kopieringsunderlag och hänvisningar till webbmaterial (kapitel 6).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

Uppgifter av kortsvarstyp

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

Uppgifter av långsvarstyp

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. (Eventuella avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.)

Modell 1

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen kan falla ut först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2

Godtagbar ansats, t.ex. … +1 E_P

med korrekt bestämning av … +1 E_P

Godtagbar verifiering av … +1 E_P

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3

E	C	A
Beskrivning av resonemang vars kvalitet motsvarar E-nivå, t.ex. … 1 E_R	Beskrivning av resonemang vars kvalitet motsvarar C-nivå, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Beskrivning av resonemang vars kvalitet motsvarar A-nivå, t.ex. … 1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

I vissa uppgifter ska elevens skriftliga kommunikativa förmåga bedömas. Då gäller följande:

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt*.
Dessutom ska
1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, dvs. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och andra representationer uttryckas på ett till stor del tydligt och korrekt sätt.
3. lösningen vara relativt lätt att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt*.
Dessutom ska
1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad och endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och andra representationer uttryckas på ett tydligt och korrekt sätt.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

*Avsteg från denna princip kan i undantagsfall göras om det bedöms att den del av lösningen som är felaktig eller saknas inte tillför något väsentligt när det gäller möjligheten att bedöma den skriftliga kommunikationsförmågan.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{\ }$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int$, dx, gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v$, $\sin^2 v$
Termer	t.ex. enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, värdemängd, definitionsmängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, växande, avtagande, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, begynnelsevillkor, sannolikhetsfördelning, täthetsfunktion, normalfördelning, standardavvikelse, intervall längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, polynomdivision, komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot
Hänvisningar	t.ex. till figur, trigonometriska formler, de Moivres formel, deriveringsregler, kedjeregeln, faktorsatsen, enhetscirkeln
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

Digitala prov ska avidentifieras

De prov som eleverna har genomfört digitalt ska *avidentifieras* före bedömningen. Läraren som bedömer ska alltså inte veta vems prov hon eller han bedömer. Mer information om detta finns på Skolverkets webbsida www.skolverket.se/genomfora-np-gymnasieskolan.

Sammanställning av elevresultat

När eleven har genomfört de olika delproven kan resultaten noteras i ”Formulär för sammanställning av elevresultat” som finns i kapitel 6. Syftet med formuläret är att underlätta för läraren att sammanställa och rapportera in elevens resultat. Det kan också användas vid samtal med eleven om provresultatet.

Sammanställning till ett provbetyg

När samtliga delprov är genomförda ska resultaten summeras till ett provbetyg. Information om hur summeringen går till finns i kapitel 4.

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1. **Max 3/0/0**

a) Korrekt svar ($f'(x) = 5\cos 5x$) +1 E_P

b) Korrekt svar ($g'(x) = 50(5x+2)^9$) +1 E_P

Kommentar: Även svaret $g'(x) = 10(5x+2)^9 \cdot 5$ godtas.

c) Korrekt svar ($h'(x) = 7x^6 \cdot e^x + x^7 \cdot e^x$) +1 E_P

2. **Max 2/0/0**

a) Korrekt svar ($90°$; $\frac{\pi}{2}$) +1 E_B

b) Korrekt svar (-3) +1 E_B

3. **Max 2/0/0**

a) Korrekt svar (6π) +1 E_{PL}

b) Godtagbar skiss av kurvan $y = \sin\frac{x}{2}$ där godtagbar amplitud och period framgår +1 E_B

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

4. **Max 1/1/0**

Minst en av kurvans asymptoter godtagbart inritad +1 E_B

med båda kurvans asymptoter godtagbart inritade och inga felaktiga asymptoter inritade +1 C_B

Kommentar: De två korrekta asymptoterna är $y = x - 1$ och $x = -2$

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

5. **Max 0/1/0**

Korrekt svar $(1 + \frac{\pi}{2})$ +1 C_P

6. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (e^2) +1 C_B

7. **Max 1/1/1**

a) Korrekt svar $(-4 - 3i)$ +1 E_B

b) Korrekt svar (t.ex. $-\frac{\pi}{4}$; $-45°$) +1 C_B

c) Godtagbar markering av linjen $\text{Im}\, z = \text{Re}\, z + 2$ +1 A_B

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

8. **Max 0/0/1**

Korrekt svar $(-\pi^2)$ +1 A_{PL}

9. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (t.ex. $\cos 36° + i \sin 36°$; $\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$) +1 A_B

Kommentar: Även svar med flera korrekta lösningar ges poäng, men svar av typen $\cos n36° + i \sin n36°$ ges ej poäng eftersom svaret innehåller reella lösningar.

10. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (y^8) +1 A_B

Instruktioner för bedömning av delprov C

11. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, förlänger med nämnarens konjugat, $\dfrac{(8+6\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($4-2\mathrm{i}$) +1 E_P

12. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer minst en lösning till ekvationen korrekt +1 E_P

med godtagbar fortsättning, bestämmer minst två lösningar till ekvationen korrekt, t.ex. $x = 15° + n \cdot 90°$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar
($x = \dfrac{\pi}{12} + n \cdot \dfrac{\pi}{2}$ och $x = \dfrac{\pi}{6} + n \cdot \dfrac{\pi}{2}$; $x = 15° + n \cdot 90°$ och $x = 30° + n \cdot 90°$) +1 C_P

13. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. skriver om VL till $\dfrac{a+b\mathrm{i}-(a-b\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$ +1 E_R

med i övrigt godtagbart resonemang där likheten visas +1 E_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

14. **Max 0/3/0**

a) Visar att $f(z)$ är delbart med $g(z)$, t.ex. med hjälp av polynomdivision +1 C_R

b) Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp $(z^2+2z+10)(z^2-1)=0$ och bestämmer minst två rötter till ekvationen +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z = \pm 1$ och $z = -1 \pm 3\mathrm{i}$) +1 C_P

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

15. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. gör liknämnigt *och* använder formeln för dubbla vinkeln i täljare eller nämnare i VL, t.ex. $\dfrac{\sin 2x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$ +1 C_R

med i övrigt godtagbart bevis +1 C_R

16. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer $\cos^2 v$ och tecknar $\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$	+1 C_{PL}
med godtagbar fortsättning, kommer fram till ett värde på $\tan v$ som uppfyller villkoret $\sin^2 v = \dfrac{8}{9}$, t.ex. $\tan v = \sqrt{8}$	+1 C_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($-\sqrt{8}$)	+1 C_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

17. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, anger ett samband mellan a och b samt deriverar f korrekt	+1 C_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a = 10$ och $b = -2$)	+1 C_{PL}
Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga”	+1 C_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

18. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. skriver om ekvationen med subtraktionssatsen för sinus, $\sin(v - 40°) = \sin v$	+1 A_R
med i övrigt godtagbart bevis	+1 A_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

19. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, bestämmer $G'(x) = (\ln x)^2 + \dfrac{2x \ln x}{x} + 3$	+1 A_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x_1 = 1$ och $x_2 = \mathrm{e}$)	+1 A_P

Instruktioner för bedömning av delprov D

20. **Max 1/0/0**

Godtagbart svar där det framgår att graferna ritas med olika vinkelmått +1 E_B

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

21. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $\int_0^{1,9} (4x^3 + k - 3x^2)\,\mathrm{d}x = 13$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,6) +1 E_{PL}

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

22. **Max 3/0/0**

a) Godtagbart svar (310 W) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, visar insikt om att derivatan ska bestämmas +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (–45 W/h) +1 E_M

Kommentar: Även svaret –45 ges poäng.

23. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, tecknar en integral för volymen med godtagbara integrationsgränser, t.ex. $\pi \int_{0,8}^{1,7} (9x - x^4 - 7)^2\,\mathrm{d}x$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4,87 v.e.) +1 C_P

Kommentar: Även svaret 4,87 ges poäng.

24. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, tecknar en relevant integral, t.ex. $\int_0^5 0{,}02t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01t^2}\,\mathrm{d}t$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (7) +1 C_M

25. **Max 1/1/3**

a) Korrekt svar (39 km/h) +1 E_M

b) Godtagbar lösning med godtagbart svar (8,5 timmar) +1 C_M

c) Godtagbar ansats, visar insikt om att $P(v) = 0,42 \cdot v^3$ ska integreras med avseende på x +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (320 000 MJ) +1 A_M

Lösningen (deluppgift b och c) kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 A_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

26. **Max 0/1/2**

Anger godtagbara värden för minst två av konstanterna +1 C_M

med godtagbart värde för ytterligare minst en konstant +1 A_M

med godtagbart svar
(t.ex. $A = 2,6$; $B = 1,6$; $C = -0,8$ och $D = 3,9$ om radianer används;
$A = 2,6$; $B = 90,0$; $C = -45,0$ och $D = 3,9$ om grader används) +1 A_M

27. **Max 0/0/3**

a) Korrekt svar (3) +1 A_{PL}

b) Godtagbart ansats, t.ex. visar insikt i att integrationsgränserna ska väljas symmetriskt runt symmetrilinjen $x = 3,5$ +1 A_R

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (5,2) +1 A_{PL}

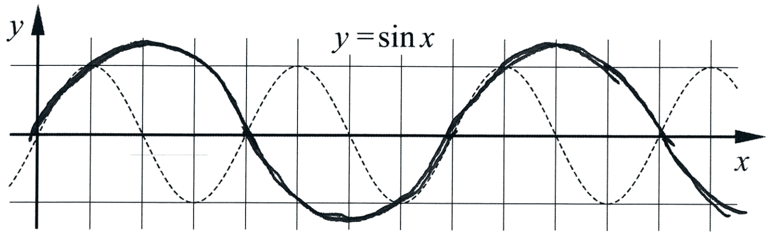
Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

3. Exempel på bedömda elevlösningar

I det här kapitlet finns exempel på bedömda elevlösningar till vissa uppgifter i provet samt kommentarer till exemplen som stöd för bedömningen.

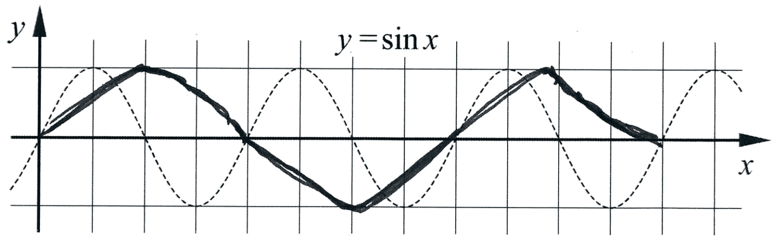
Uppgift 3

Elevlösningsexempel 3.1 (0 poäng)



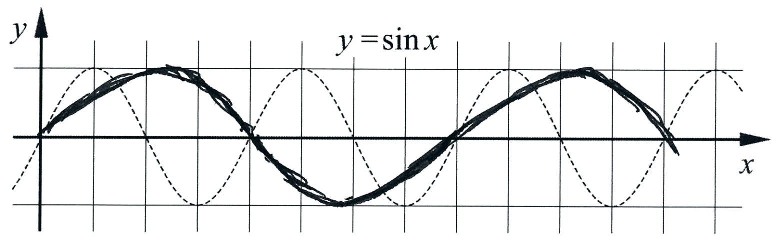
Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas en kurva som inte har en godtagbar amplitud. Därmed anses inte kraven för begreppspoäng på E-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 3.2 (1 E_B)



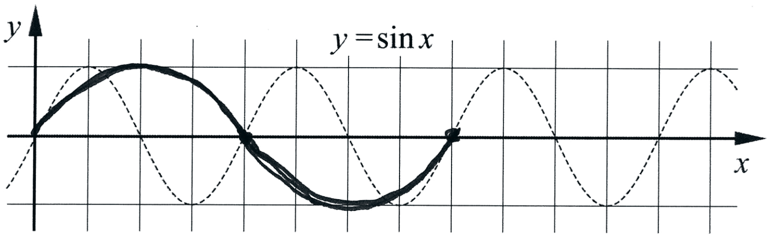
Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas en godtagbar skiss där den korrekta amplituden och perioden framgår. Trots att kurvan har en något kantig form anses kraven för begreppspoäng på E-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 3.3 (1 E_B)



Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas en godtagbar skiss där den korrekta amplituden och perioden framgår. Trots att kurvan är något skev och inte prickar extrempunkterna exakt anses kraven för begreppspoäng på E-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

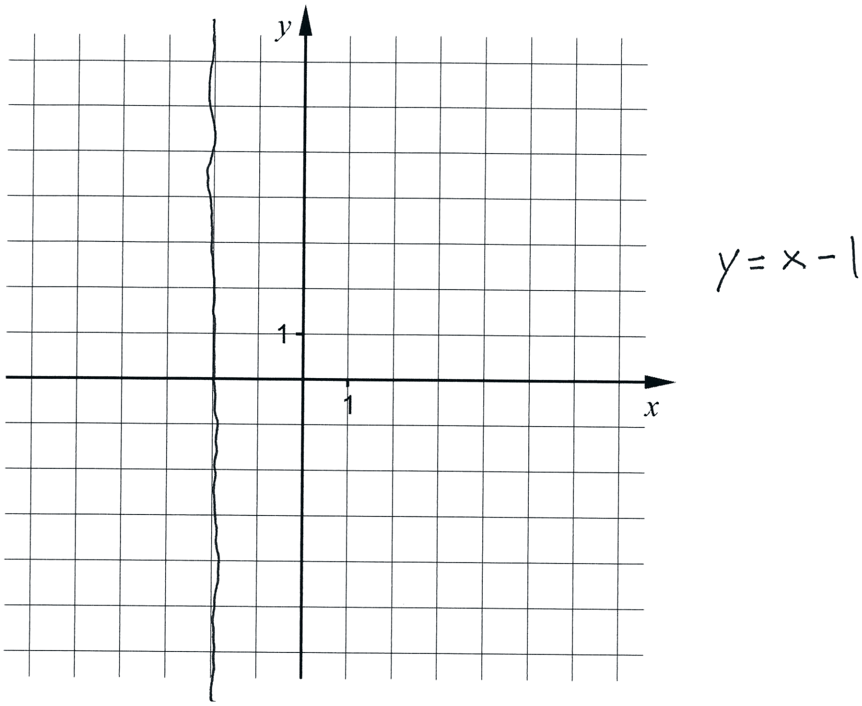
Elevlösningsexempel 3.4 (1 E_B)



Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas en godtagbar skiss där den korrekta amplituden och perioden framgår. Trots att endast en period av kurvan är ritad anses kraven för begreppspoäng på E-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

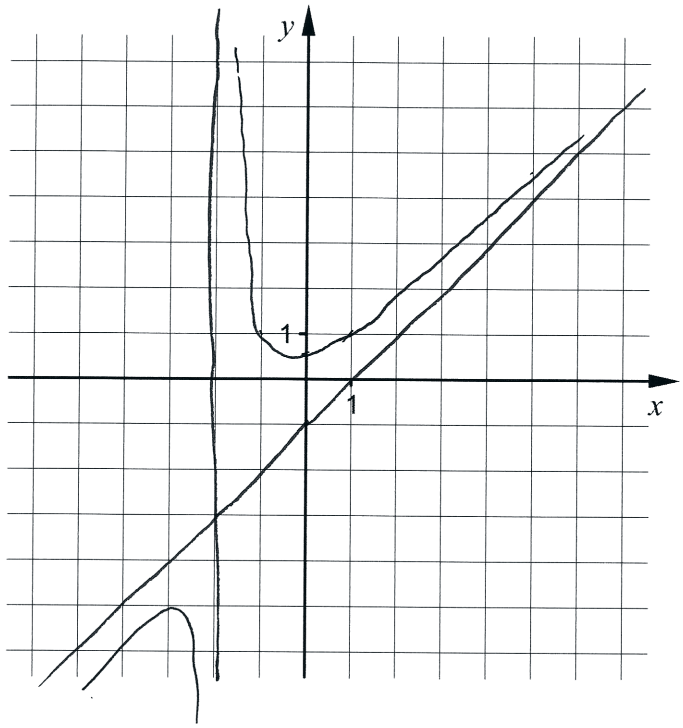
Uppgift 4

Elevlösningsexempel 4.1 (1 E_B)



Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas en godtagbart ritad lodrät asymptot. För den andra asymptoten har en korrekt ekvation angetts men utan skiss och lösningen uppfyller därmed inte kraven för begreppspoäng på C-nivå.

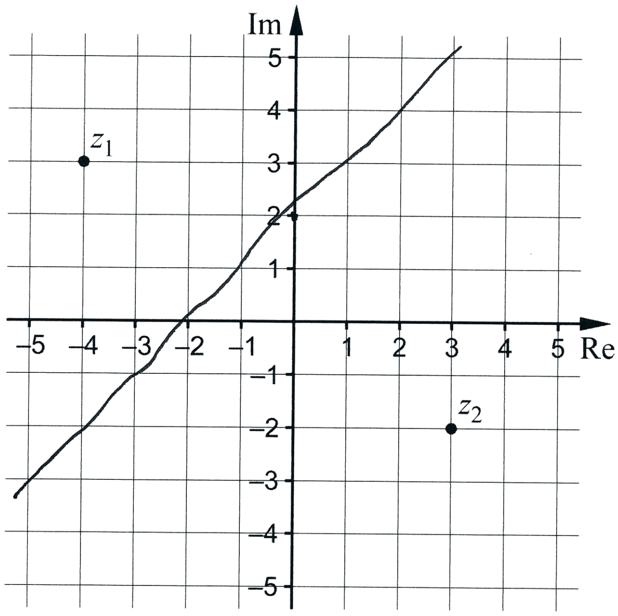
Elevlösningsexempel 4.2 (1 E_B och 1 C_B)



Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas två godtagbart inritade asymptoter. Trots att lösningen även innehåller en skiss av kurvan ges lösningen samtliga möjliga poäng.

Uppgift 7c

Elevlösningsexempel 7c.1 (1 A_B)



Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen är linjen $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z + 2$ inritad. Trots att linjen är något oprecist inritad anses kraven för en begreppspoäng på A-nivå vara uppfyllda.

Uppgift 13

Elevlösningsexempel 13.1 (0 poäng)

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \operatorname{Im} z$$

$$\text{V.L.} = \frac{(2+2i)-(2-2i)}{2i} =$$

$$= \frac{2+2i-2+2i}{2i} =$$

$$= \frac{4i}{2i} = 2 = \text{H.L.} \qquad \text{V.S.V.}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas att sambandet gäller för ett specifikt fall, $z = 2 + 2i$. Detta anses inte motsvara en godtagbar ansats.

Elevlösningsexempel 13.2 (1 ER)

$z = a + bi \quad \bar{z} = a - bi$

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{(a+bi)-(a-bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = bi = \text{Im}\, z$$

VSB.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen påbörjas beviset korrekt vilket uppfyller kraven för ansatspoängen. I den fortsatta lösningen sätts sista kvoten lika med bi i stället för det korrekta b. Vidare anges felaktigt att $bi = \text{Im}\, z$. Därmed anses likheten inte visad. Lösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 13.3 (2 ER)

$z - \bar{z} = x + yi - (x - yi) = 2yi$

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{2yi}{2i} = y \quad \text{V.S.B.}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas att uttrycket är lika med y men utan kommentar om att $y = \text{Im}\, z$. Trots denna brist anses kraven för den andra poängen nätt och jämnt vara uppfylld. Lösningen ges två resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 13.4 (2 ER)

Den reella delen av z tar ut varandra när de subtraheras eftersom den är samma på båda. Och eftersom $\bar{z}$ är tvärtom z på den imaginära delen så får man Im z när man delar med 2i,

t.ex. $\frac{4i - (-4i)}{2i} = 4$

Så om vi har $z = 3 + 4i$ så blir det

$$\frac{3 + 4i - (3 - 4i)}{2i} = 4$$

och Im z är då i detta fall 4.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen genomförs ett något otydligt generellt resonemang med den något oprecisa formuleringen ”eftersom $\bar{z}$ är tvärtom z på den imaginära delen”. Sedan följer två exempel för att förtydliga resonemanget. Sammantaget anses detta nätt och jämnt uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen. Lösningen ges två resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 14

Elevlösningsexempel 14.1 (2 CP)

a) $z^2 - 1 = 0 \qquad z = 1$

$f(1) = 1^4 + 2\cdot 1^3 + 9\cdot 1^2 - 2\cdot 1 - 10 =$

$= 1 + 2 + 9 - 2 - 10 = 0$

b)

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{\quad z^2 + 2z + 10} & \\
\hline
z^4 + 2z^3 + 9z^2 - 2z - 10 & z^2 - 1 \\
-(z^4 - z^2) & \\
\hline
\quad 2z^3 + 10z^2 - 2z - 10 & \\
\quad -(2z^3 - 2z) & \\
\hline
\qquad 10z^2 - 10 & \\
\qquad -(10z^2 - 10) & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$(z^2 + 2z + 10)(z^2 - 1) = 0$

$z = -1 \pm \sqrt{1 - 10}$

$z = -1 \pm 3i$

Svar $z_1 = -1 + 3i$

$z_2 = -1 - 3i$

$z_3 = 1$

$z_4 = -1$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen till deluppgift a) visas endast att den positiva roten till $z^2 - 1 = 0$ är ett nollställe till f. Det är inte tillräckligt för att visa att $z^2 - 1$ är en faktor. I elevlösningen till deluppgift b) genomförs en polynomdivision som ger resten noll. Sedan bestäms samtliga rötter korrekt. Trots att polynomdivisionen i deluppgift b) implicit visar att f är delbar med $z^2 - 1$ ges inte poäng för lösningen i a). Sammantaget ges lösningen två procedurpoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 14.2 (1 C_R och 2 C_P)

a)

$$
\begin{array}{rl}
 & z^2+2z+10 \\
\hline
 & z^4+2z^3+9z^2-2z-10 \quad \big\rfloor\; z^2-1 \\
- & (z^4 \qquad\quad -z^2) \\
\hline
 & 2z^3+10z^2-2z-10 \\
- & (2z^3 \qquad\quad -2z) \\
\hline
 & 10z^2 \qquad\quad -10 \\
- & (10z^2 \qquad\quad -10) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

b)

$(z^2-1)(z^2+2z+10)=0$

$z^2-1=0 \rightarrow z=\pm 1$

$z^2+2z+10=0 \rightarrow z=-1\pm\sqrt{1-10}=-1\pm 3i$

Svar $z_1=-1+3i$
$z_2=-1-3i$
$z_3=1$
$z_4=-1$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen till deluppgift a) genomförs en korrekt polynomdivision som ger resten noll. Trots avsaknad av kommentar om delbarheten anses kraven för resonemangspoängen vara uppfyllda. I elevlösningen till deluppgift b) används resultatet i deluppgift a) och en godtagbar bestämning av samtliga rötter görs. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng på uppgiften.

Uppgift 16

Elevlösningsexempel 16.1 (2 CPL)

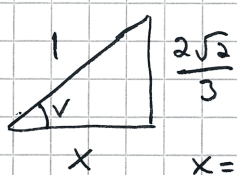
$\tan v = ?$ $\quad 90^\circ < v < 180^\circ$

$\sin^2 v = \frac{8}{9}$

$\sin v = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$

$\tan v = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{1} = 2\sqrt{2}$



$x = \cos v$

Svar $\tan v = -2\sqrt{2}$

$1^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + x^2$

$1 = \frac{8}{9} + \cos^2 v$

$\frac{1}{9} = \cos^2 v \Rightarrow \cos v = \frac{1}{3}$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms med hjälp av en rätvinklig triangel att $\tan v = 2\sqrt{2}$, vilket uppfyller villkoret $\sin^2 v = \frac{8}{9}$ men inte intervallvillkoret.

I svaret görs sedan ett teckenbyte på $\tan v$ utan motivering. Därmed anses inte kraven för resonemangspoäng på C-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 16.2 (2 C_{PL} och 1 C_R)

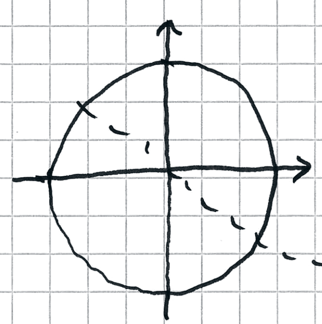
$$\begin{cases} \sin^2 v = \frac{8}{9} \\ \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \end{cases}$$

$$\cos^2 v = 1 - \sin^2 v = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\tan^2 v = \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v} = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{1}{9}} = \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{1} = 8$$

$$\tan v = \sqrt{\tan^2 v} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

För $90° < v < 180°$



För en vinkel i andra kvadranten behöver talet vara negativt dvs:

$\therefore \tan v = -2\sqrt{2}$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms ett korrekt värde på $\tan v$ som uppfyller båda villkoren. När $\tan v$ bestäms ur $\tan^2 v$ bortses från det negativa värdet. I och med den efterföljande kommentaren om att $\tan v$ är negativt i andra kvadranten anses ändå kraven för resonemangspoängen nätt och jämnt vara uppfyllda. Sammantaget ges samtliga möjliga poäng.

Uppgift 17

Elevlösningsexempel 17.1 (2 C_{PL} och 1 C_K)

$$f(x) = \frac{a\cancel{x}+b}{x+1} \qquad f(1) = \frac{a+b}{2}$$

$$f'(x) = \frac{a(x+1) - 1(ax+b)}{(x+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{a\cdot 2 - (a+b)}{2^2} = \frac{2a-a-b}{4} = \frac{a-b}{4}$$

$$\frac{a+b}{2} = 4 \rightarrow a+b=8 \rightarrow a = 8-b$$

$$\frac{a-b}{4} = 3 \rightarrow a-b=12 \rightarrow a = 12+b$$

$$8-b = 12+b$$

$$-4 = 2b$$

$$b = -2 \qquad a = 8-(-2) = 8+2 = 10$$

$$\underline{\text{Svar}} \begin{cases} a = 10 \\ b = -2 \end{cases}$$

Bedömningskommentar: I elevlösningen bestäms korrekta värden på a och b. När det gäller kommunikation är den matematiska symbolhanteringen korrekt men villkoren i uppgiften används på rad 4 och 5 utan hänvisning till framtagna uttryck för $f(1)$ och $f'(1)$. Likaså sätts en ekvation upp för bestämning av b på rad 6 utan hänvisning till sambanden på rad 4 och 5. Trots dessa brister anses kraven för kommunikationspoäng på C-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

Uppgift 18

Elevlösningsexempel 18.1 (1 A_R)

$\sin v \cos 40^\circ = \sin v + \cos v \sin 40^\circ$

$\underbrace{\sin v \cos 40^\circ - \cos v \sin 40^\circ}_{\sin(v-40^\circ)} = \sin v$

$\sin(v - 40^\circ) = \sin v$

Eftersom att $\sin v$ har sitt högsta värde då $v = 90^\circ$ då $v \geq 90^\circ$ speglar där $v \leq 90^\circ$. Med tanke på detta skulle det krävas att vi hade ett v-värde på 110° för att påståendet ska stämma och eftersom $0^\circ \leq v \leq 90^\circ$ så saknar ekvationen lösning inom intervallet $0^\circ \leq v \leq 90^\circ$.

V. S. V.

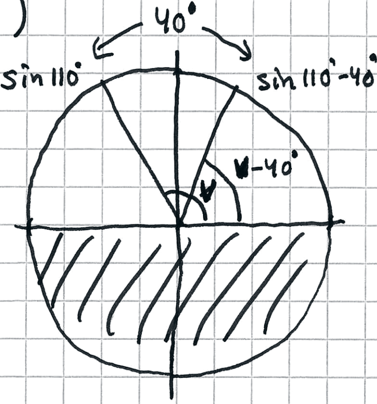
Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen hänvisas till att $\sin v$ har största värdet då $v = 90^\circ$ och en något otydlig beskrivning av symmetrin: ”då $v \geq 90^\circ$ speglar där $v \leq 90^\circ$”. Sedan påstås utan motivering att det krävs att $v = 110^\circ$ för att påståendet ska stämma, vilket inte visar att lösningar saknas i intervallet. Därmed anses inte kraven för den andra resonemangspoängen på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 18.2 (2 AR)

$\sin v \cos 40° = \sin v + \cos v \sin 40°$

$\sin v \cos 40° - \cos v \sin 40° = \sin v$

$\sin v \cos 40° - \cos v \sin 40° = \sin(v - 40°)$



$\sin(180° - \theta) = \sin(\theta)$

$\Rightarrow$ sin har två lika värden, ett i första och ett i andra kvadranten.

$\Rightarrow \sin v = \sin(v - 40°)$ om $0° \leq v \leq 90°$

eftersom det krävs $v \geq 110°$ för att

$\sin v = \sin(v - 40°)$

$\sin 110° = \sin(110° - 40°)$

Q.E.D.

$\frac{40°}{2} = 20°$.

20° åt vardera håll från 90° ger samma sin.

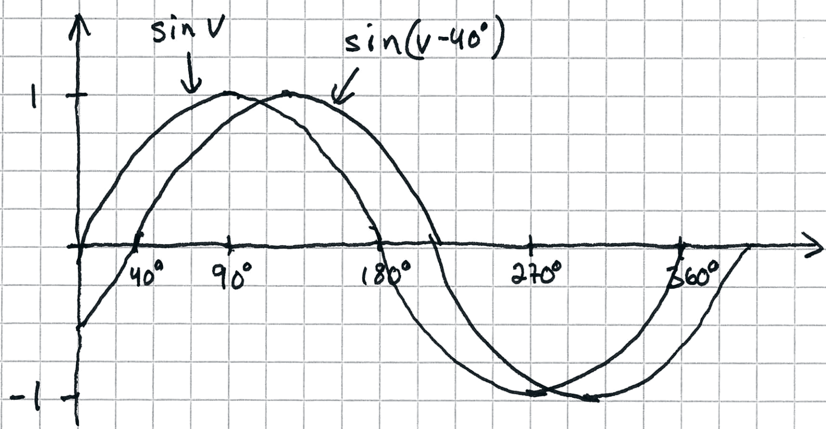
Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen hänvisas till formeln $\sin(180° - \theta) = \sin(\theta)$ och tolkningen att ”sin har två lika värden, ett i första och ett i andra kvadranten”. Med hjälp av enhetscirkeln markeras vinklarna v och $v - 40°$ i varsin kvadrant och en beräkning görs att $v = 110°$. Resonemanget som helhet anses utesluta lösningar till ekvationen i intervallet. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng.

Elevlösningsexempel 18.3 (2 AR)

$\sin v \cos 40° = \sin v + \cos v \sin 40°$ saknar lösning i $0 \leq v \leq 90°$

$\sin v \cos 40° - \cos v \sin 40° = \sin v$

$\sin(v - 40°) = \sin v$



Linjerna stöter inte på varandra föräns efter 90°

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen skissas graferna till $y = \sin v$ och $y = \sin(v - 40°)$. Därefter konstateras att ”Linjerna stöter inte på varandra föräns efter $90°$”. Detta anses tillräckligt för att visa att lösningar till ekvationen saknas i intervallet. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng.

Elevlösningsexempel 18.4 (2 A_R)

$\sin v \cos 40° = \sin v + \cos v \sin 40°$

$\sin v \cos 40° - \cos v \sin 40° = \sin v$ (sin(u+v))

$\sin(v-40°) = \sin v$ (arcsin)

$v - 40° = v + n \cdot 360°$

$v - 40° = 180° - v + n \cdot 360°$

$2v = 220° + n \cdot 360°$

$v = 110° + n \cdot 180°$

v får då aldrig värdet $0° \leq v \leq 90°$ V.S.B.

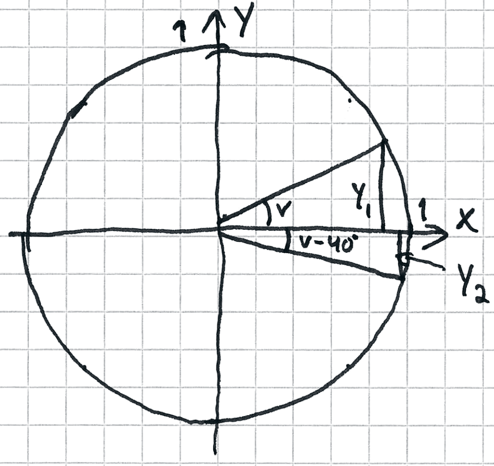
Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen genomförs en förenkling med subtraktionssatsen för sinus följt av en algebraisk lösning av ekvationen. Där lämnas ekvationen $v - 40° = v + n \cdot 360°$ utan kommentar om att den saknar lösning. Trots detta anses lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 18.5 (2 AR)

$\sin v \cos 40° = \sin v + \cos v \sin 40°$

$\sin v \cos 40° - \cos v \sin 40° = \sin v$

$\sin(v - 40°) = \sin v$



$y_1 = \sin v \quad y_2 = \sin(v - 40°)$

$0° \leq v \leq 90°$

Vad än v är i intervallet så blir alltid $y_1 > y_2$ då y_2 även kan vara negativt. samt att det är 40° mindre

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas enhetscirkeln med vinklarna v och $v - 40°$ inritade, där v är vald så att $0° \leq v \leq 90°$. Sedan namnges y-koordinaterna på enhetscirkeln: $y_1 = \sin v$ och $y_2 = \sin(v - 40°)$. Slutligen resoneras utifrån figuren att $y_1 > y_2$ oavsett vilket värde v har i intervallet. Detta anses visa att $\sin v = \sin(v - 40°)$ saknar lösning för v i intervallet $0° \leq v \leq 90°$. Lösningen anses uppfylla kraven för båda resonemangs-poängen på A-nivå.

Uppgift 20

Elevlösningsexempel 20.1 (0 poäng)

Zaras kurva har kortare period än Yosefs.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen beskrivs skillnaden mellan kurvorna. Det saknas dock en förklaring till varför Yosefs och Zaras kurvor ser olika ut för samma inmatade funktion.

Elevlösningsexempel 20.2 (0 poäng)

De har råkat använda olika inställningar.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen framgår inte vilken typ av inställningar det gäller.

Elevlösningsexempel 20.3 (1 E_B)

En har ställt räknaren på radianer.

Bedömningskommentar till exemplet: Även om det inte uttrycks vem som ritar kurvan i radianer framgår det att graferna ritats med olika vinkelmått.

Elevlösningsexempel 20.4 (1 E_B)

De har haft olika vinkelinställningar

Bedömningskommentar till exemplet: Även om det inte nämns något om grader och radianer framgår det att graferna ritats med olika vinkelmått.

Uppgift 21

Elevlösningsexempel 21.1 (2 E_{PL})

$x = 1{,}9$ $\quad y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{under}}}{3x^2}$ $\quad y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{över}}}{4x^3} + k$ $\quad$ 13 a.e.

$$\int_0^{1,9} 4x^3 + k - 3x^2$$

1. Skrev in alla tre funktionerna i geogebra
2. Skrev in integral mellan $4x^3 + k$ och $3x^2$ och sedan prövade jag med glidare och fick 13 a.e. när $k = 3{,}6$.

Svar: $k = 3{,}6$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen anges en integral för beräkning av arean även om dx saknas. Sedan genomförs en prövning i GeoGebra där ett godtagbart värde på k bestäms. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 21.2 (2 E_{PL})

$$\int_0^{1,9} (4x^3 + k - 3x^2)\,dx = 13$$

Löser med CAS

$k = 3,6$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen anges en ekvation för lösning av problemet. Ekvationen löses med CAS och ett godtagbart värde på k erhålls. Trots att ingen beskrivning görs om hur CAS använts anses lösningen uppfylla kraven för två problemlösningspoäng på E-nivå.

Uppgift 25

Elevlösningsexempel 25.1 (0 poäng på deluppgift c)

$$\int_0^{15,492} 0,42\,v^3 dt = 6051,2 \text{ MJ}$$

Maxeffekt $0,42 \cdot 36^2 = 19595,52$

Totalt $= 6051,2 + 19595,52 \cdot (24 - 15,492) =$

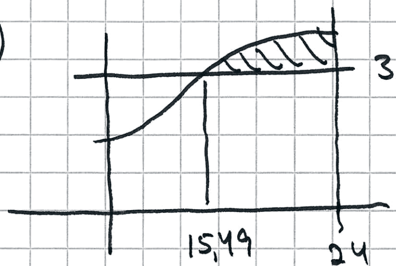
$= 172769,88$ MJ

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen av deluppgift c) delas produktionen av elenergi upp i två beräkningar, en integralberäkning och en areaberäkning vid maximaleffekt. Båda dessa beräkningar utgår från $0,42v^3$ utan att ersätta v med uttrycket för sinusfunktionen. Detta gör att kraven för ansatspoängen i deluppgift c) inte anses uppfyllda.

Elevlösningsexempel 25.2 (1 E_M, 1 C_M och 2 A_M)

a) 39 km/h

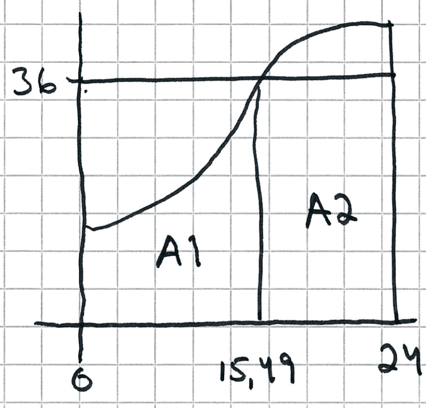
b)



behöver veta när $f(x) = 36$ resten av dygnet så är vindhastigheten över.

i $24 - 15{,}49$ timmar alltså $8{,}5$ timmar.

c)



$A2 = 0{,}42 \cdot 36^3 \cdot 8{,}5 =$

$= 167 \cdot 10^3$ MJ

$A1 = 150{,}9 \cdot 10^3$ MJ

bytade ut v i $P(v)$ till $v(x)$

$P(v) = 0{,}42 \cdot (f(x))^3$

integralen för denna funktion mellan $x = 0$ och $x = 15{,}49$ gav mig A1

Svar $= A_1 + A_2 =$

$150{,}9 \cdot 10^3 + 167 \cdot 10^3 =$

$318 \cdot 10^3$ MJ

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen behandlas uppgiften i sin helhet med korrekt svar. När det gäller kommunikation saknas i deluppgift b) och c) gradering och namngivning av axlarna och dessutom används beteckningen $f(x)$ i stället för $v(x)$. I deluppgift c) är y-värdet 36 felaktigt i figuren då y-axeln här torde representera effekten och inte vindhastigheten. Dessa brister gör att kraven på tydlighet och korrekthet i användandet av matematiska symboler för kommunikationspoäng på A-nivå inte anses uppfyllda.

Elevlösningsexempel 25.3 (1 E_M, 1 C_M, 2 A_M och 1 A_K)

a) 39 km/h

b) $v = 36 \Rightarrow x = 15{,}494$

$v > 36$ fortsätter natten ut

$t = t_{slut} - t_{start} = 24 - 15{,}494 = 8{,}506$

Svar: Under 8,5 timmar

c) $P(v) = 0{,}42\, v^3$

$v(x) = 11 \sin(0{,}11x - 0{,}89) + 28$

$$\text{Tot energi} = \int_0^{24} \left(\begin{cases} P(v); & x < 15{,}494 \\ P(36); & x > 15{,}494 \end{cases} \right) dx =$$

$$= \int_0^{15{,}494} P(v)\,dx + \int_{15{,}494}^{24} P(36)\,dx \approx 317640 \text{ MJ}$$

avläses i geogebra

Svar: Vindkraftverken producerar totalt 318 GJ.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen behandlas uppgiften i sin helhet med korrekt svar. När det gäller kommunikation saknas i deluppgift b) information om hur $x = 15{,}494$ bestämts. Trots detta anses kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda.

Uppgift 27b

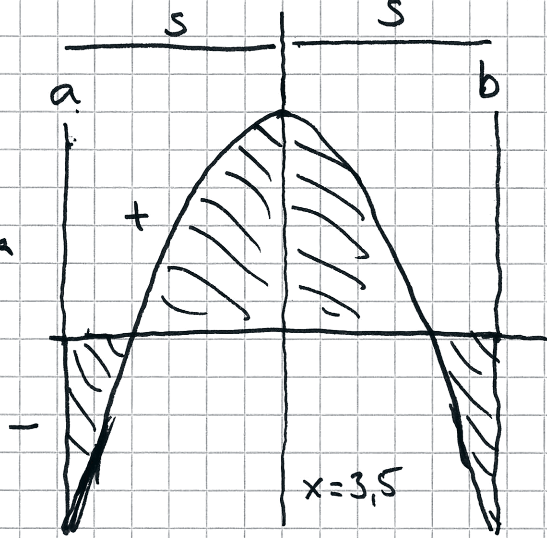
Elevlösningsexempel 27b.1 (1 A_R)

$a < b$

$$C = 0 = \int_a^b (7x - x^2 - 10)\,dx$$

a ska vara så litet som möjligt och b ska vara så stort som möjligt.

b − a Skillnaden ska vara så stor som möjligt.



Symmetrilinjen är i $x = 3{,}5$ given av derivering i geogebra

För att få största skillnaden ska a och b vara lika nära $x = 3{,}5$.

$3{,}5 - a$

a.e. = 0

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen påpekas att a ska vara så litet som möjligt och att b ska vara så stort som möjligt och att de ska vara lika nära symmetrilinjens x-koordinat. Tillsammans med en illustrativ figur anses detta resonemang om hur intervallet ska väljas tillräckligt för att uppfylla kraven för resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 27b.2 (1 AR och 1 APL)

$$\int_2^5 (7x - x^2 - 10)\,dx = 4{,}5 \qquad \frac{4{,}5}{2} = 2{,}25$$

Löser $\int_x^2 (7x - x^2 - 10)\,dx = -2{,}25$ med CAS

$\Rightarrow x = 0{,}9$ $\qquad 2 - 0{,}9 = 1{,}1$

och två lösningar som int passar $\qquad 5 + 1{,}1 = 6{,}1$

$$\int_{0,9}^{6,1} (7x - x^2 - 10)\,dx = 0 \qquad b - a = 6{,}1 - 0{,}9 = \underline{\underline{5{,}2}}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms först integralens värde med nollställena som integrationsgränser. Därefter bestäms den undre integrationsgränsen, det vill säga värdet på konstanten a, med hjälp av CAS men utan att samtliga lösningar till ekvationen redovisas ($x = 3{,}5$ och $x = 6{,}09...$). Trots detta anses ekvationslösningen vara godtagbar i och med kommentaren ”och två lösningar som inte passar”. Vidare bestäms det största värdet för $(b - a)$ genom att först bestämma den andra integrationsgränsen. Även om det i elevlösningen inte motiveras varför detta är det största värdet anses lösningen i det här fallet nätt och jämnt uppfylla kraven för en resonemangspoäng på A-nivå och en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 27b.3 (1 A_R och 1 A_{PL})

Integral($7x-x^2-10$, a, b) i CAS ger

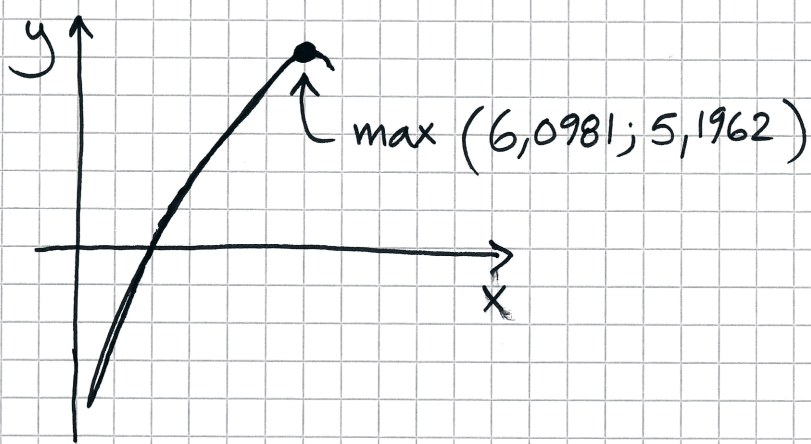
$$\frac{2a^3-21a^2-60a-2b^3+21b^2-60b}{6}$$

Lös($=0$) i CAS ger

$a=b$

$$a=\frac{-2b\pm\sqrt{-4b^2+28b-13}\cdot\sqrt{3}+21}{4}$$

Ersätter b med x och ritar $y=b-a$ för att hitta max



Med det andra a:et fick jag ett min (0,9019; −5,1962)

Svar: Det största värdet på (b−a) är 5,1962.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen används CAS för att först bestämma ett uttryck för $\int_a^b (7x-x^2-10)\,dx$ som används för att lösa ekvationen $\int_a^b (7x-x^2-10)\,dx=0$. Lösningen till ekvationen ger tre möjliga samband mellan konstanterna a och b som används för att grafiskt bestämma det maximala värdet för $(b-a)$. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng.